Déterminer tous les entiers naturels *n* tels que dans la division euclidienne de *n* par 13, le quotient est égal au double du reste (on donnera, dans chaque cas, la division euclidienne).

Analyse

Rappelons que la division euclidienne d'un entier naturel *a* par un entier naturel *b* (non nul) correspond à l'égalité (unique) $a = q \times b + r$ avec $0 \le r < b$.

Résolution

On a : $n = q \times 13 + r$ avec $0 \le r < 13$.
On veut ici : $q = 2r$, d'où : $n = q \times 13 + r = 2r \times 13 + r = 26r + r = 27r$.
L'entier naturel *n* est donc un multiple de 27 de la forme $27r$ avec $0 \le r < 13$.

L'ensemble des solutions s'écrit :

$$\mathscr{S} = \{27r \,/\, 0 \le r < 13\}$$

Comme *r* peut prendre 13 valeurs, cet ensemble comporte … 13 éléments !

A partir de $n = 26r + r$, on obtient facilement les divisions euclidiennes demandées :

r	n	Division euclidienne de *n* par 13
0	0	$0 = 0 \times 13 + 0$
1	27	$27 = 2 \times 13 + 1$
2	54	$54 = 4 \times 13 + 2$
3	81	$81 = 6 \times 13 + 3$
4	108	$108 = 8 \times 13 + 4$
5	135	$135 = 10 \times 13 + 5$
6	162	$162 = 12 \times 13 + 6$
7	189	$189 = 14 \times 13 + 7$
8	216	$216 = 16 \times 13 + 8$
9	243	$243 = 18 \times 13 + 9$
10	270	$270 = 20 \times 13 + 10$
11	297	$297 = 22 \times 13 + 11$
12	324	$324 = 24 \times 13 + 12$