Soit n un entier relatif.

On suppose que le quotient et le reste dans la division euclidienne de n par 5 sont respectivement q et 2.

Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de :

1. $2n$ par 5 ;
2. $3n$ par 5 ;
3. $-n$ par 5 ;
4. $-n$ par -5 ;
5. $-2n$ par -10 ;
6. n^2 par 5.

Analyse

Rappelons que la division euclidienne d'un entier a par un entier b (non nul) correspond à l'égalité (unique) $a = q \times b + r$ avec $0 \leq r < |b|$. On commence ici par poser l'écriture correspondant à la division euclidienne de n par 5 puis on la modifie pour obtenir les quotients et restes des autres divisions euclidiennes considérées.

Résolution

D'après l'énoncé, on a : $n = 5q + 2$.

1^er^ cas

A partir de $n = 5q + 2$, on a : $2n = 2\times(5q+2) = 5\times(2q) + 4$. Comme 4 est strictement inférieur à 5, cette écriture correspond à la division euclidienne de $2n$ par 5. Ainsi :

$$\boxed{\text{Dans la division euclidienne de } 2n \text{ par 5, le quotient est égal à } 2q \text{ et le reste à 4.}}$$

2ème cas

A partir de $n = 5q + 2$, on a : $3n = 3\times(5q+2) = 5\times(3q) + 6 = 5\times(3q) + 5 + 1 = 5\times(3q+1) + 1$. Comme 1 est strictement inférieur à 5, cette écriture correspond à la division euclidienne de $3n$ par 5. Ainsi :

Dans la division euclidienne de $3n$ par 5, le quotient est égal à $3q+1$ et le reste à 1.

3ème cas

A partir de $n = 5q + 2$, on a : $-n = -(5q+2) = 5\times(-q) - 2 = 5\times(-q) - 5 + 3 = 5\times(-q-1) + 3$. Comme 3 est strictement inférieur à 5, cette écriture correspond à la division euclidienne de $-n$ par 5. Ainsi :

Dans la division euclidienne de $-n$ par 5, le quotient est égal à $-q-1$ et le reste à 3.

4ème cas

A partir de $-n = 5\times(-q-1) + 3$, on a : $-n = -5\times(q+1) + 3$. Comme 3 est strictement inférieur à $|-5| = 5$, cette écriture correspond à la division euclidienne de $-n$ par -5. Ainsi :

Dans la division euclidienne de $-n$ par -5, le quotient est égal à $q+1$ et le reste à 3.

5ème cas

A partir de $2n = 5\times(2q) + 4$ (cf. le 1er cas), on a :
$-2n = -[5\times(2q) + 4] = -10\times q - 4 = -10\times q - 10 + 6 = -10\times(q+1) + 6$. Comme 6 est strictement inférieur à $|-10| = 10$, cette écriture correspond à la division euclidienne de $-2n$ par -10. Ainsi :

Dans la division euclidienne de $-2n$ par -10, le quotient est égal à $q+1$ et le reste à 6.

6ème cas

A partir de $n=5q+2$, on a : $n^2=(5q+2)^2=25q^2+20q+4=5\times(5q^2+4q)+4$. Comme 4 est strictement inférieur à 5, cette écriture correspond à la division euclidienne de n^2 par 5.
Ainsi :

Dans la division euclidienne de n^2 par 5, le quotient est égal à $5q^2+4q$ et le reste à 4.