

On considère la suite d'entiers naturels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \underbrace{22 \dots 222}_n 1$$

n fois le chiffre "2"

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = 11 \times \underbrace{11 \dots 111}_{n+1}$$

$n+1$ fois le chiffre "1"

Analyse

La suite des produits des répunits par 11 (11×1 , 11×11 , 11×111 , etc.) nous donne un bon prétexte pour une petite récurrence où l'on doit quand même compter les chiffres des nombres manipulés avec quelque attention ... ☺

Résolution

Initialisation

Pour $n = 0$, on a, par définition de la suite (u_n) : $u_0 = 11$.

Comme $n+1 = 0+1 = 1$, le produit s'écrit 11×1 et on a bien : $11 \times 1 = 11 = u_0$.

L'égalité est donc vraie au rang 0.

Bien que ce ne soit absolument pas nécessaire, intéressons-nous au cas $n = 1$.

On a : $u_1 = 121$. Quant au produit, il s'écrit : 11×11 qui est bien égal à 121.

L'égalité est également vraie au rang 1.

Hérédité

Soit n un entier naturel quelconque fixé.

Nous supposons que l'égalité est vraie au rang n , c'est-à-dire :

$$u_n = 1 \underbrace{22 \dots 222}_n 1 = 11 \times \underbrace{11 \dots 111}_{n+1}$$

n fois le chiffre "2" $n+1$ fois le chiffre "1"

On s'intéresse alors à : u_{n+1} .

On a :

$$u_{n+1} = 1 \underbrace{22\dots222}_{{n+1} \text{ fois le chiffre "2"}} 1 = 1 \underbrace{22\dots222}_{{n} \text{ fois le chiffre "2"}} 10 + 11 = 1 \underbrace{22\dots222}_{{n} \text{ fois le chiffre "2"}} \times 10 + 11 = u_n \times 10 + 11$$

Mais d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $u_n = 1 \underbrace{22\dots222}_{{n} \text{ fois le chiffre "2"}} 1 = 11 \times \underbrace{11\dots111}_{{n+1} \text{ fois le chiffre "1"}}$.

D'où :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n \times 10 + 11 = 11 \times \underbrace{11\dots111}_{{n+1} \text{ fois le chiffre "1"}} \times 10 + 11 \\ &= 11 \times \left(\underbrace{11\dots111}_{{n+1} \text{ fois le chiffre "1"}} \times 10 + 1 \right) = 11 \times \left(\underbrace{11\dots1110}_{{n+1} \text{ fois le chiffre "1"}} + 1 \right) \\ &= 11 \times \underbrace{11\dots111}_{{n+2} \text{ fois le chiffre "1"}} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion

L'égalité est vraie pour tout entier naturel n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \underbrace{22\dots222}_{{n} \text{ fois le chiffre "2"}} 1 = 11 \times \underbrace{11\dots111}_{{n+1} \text{ fois le chiffre "1"}}$$