Soit N un entier naturel et $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0}$ son écriture décimale.
On associe à N la somme $S(N)$ définie par :

$$\begin{aligned} S(N) = {} & \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \ldots a_2 a_1 a_0} + \overline{a_0 a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_3 a_2 a_1} \\ & + \overline{a_1 a_0 a_n a_{n-1} \ldots a_4 a_3 a_2} + \ldots + \overline{a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} a_{n-4} \ldots a_1 a_0 a_n} \end{aligned}$$

Par exemple, pour $N = 735$, on a :

$$S(N) = 735 + 573 + 357$$

(Les termes de la somme sont obtenus par « permutation circulaire »)

1. Montrer que $S(23)$ est divisible par 11.
   Montrer que $S(76)$ est divisible par 11.
   Généraliser.
2. Montrer que $S(135)$ est divisible par 111.
   Montrer que $S(569)$ est divisible par 111.
   Généraliser
3. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel $N = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0}$ que l'entier naturel $S(N)$ est divisible par $\underbrace{11\ldots111}_{\substack{n+1 \text{ fois} \\ \text{le chiffre "1"}}}$.
4. Donner une solution de l'équation $S(N) = 32\,219$.

Analyse

Considérer l'écriture décimale d'un entier naturel, effectuer des permutations circulaires sur cette écriture, sommer les résultats obtenus et obtenir un nouvel entier naturel divisible par un répunit … voici le programme de cet exercice qui ne présente pas de grosse difficulté mais requiert un calcul littéral à la troisième question.

Résolution

Question 1.

On a : $S(23)=23+32=55=5\times 11$ et $S(76)=76+67=143=13\times 11$. Ainsi, $S(23)$ et $S(76)$ sont divisibles par 11.

Soit maintenant un entier N dont l'écriture décimale est $\overline{ab}$ (avec $a\neq 0$).
Par définition, on a : $S(N)=\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=11a+11b=(a+b)\times 11$
Ainsi $S(N)$ est divisible par 11.

$S(23)$ et $S(76)$ sont divisibles par 11. Plus généralement, pour tout entier naturel N dont l'écriture décimale est $\overline{ab}$ (avec $a\neq 0$), l'entier naturel $S(N)$ est divisible par 11.

Question 2.

On a : $S(135)=135+513+351=999=9\times 111$ et $S(569)=569+956+695=2220=20\times 111$. Ainsi, $S(135)$ et $S(569)$ sont divisibles par 111.

Soit maintenant un entier N dont l'écriture décimale est $\overline{abc}$ (avec $a\neq 0$).
Par définition, on a :

$$\begin{aligned}S(N)&=\overline{abc}+\overline{cab}+\overline{bca}\\&=100a+10b+c+100c+10a+b+100b+10c+a\\&=111a+111b+111c\\&=(a+b+c)\times 111\end{aligned}$$

Ainsi $S(N)$ est divisible par 111.

$S(135)$ et $S(569)$ sont divisibles par 111. Plus généralement, pour tout entier naturel N dont l'écriture décimale est $\overline{abc}$ (avec $a\neq 0$), l'entier naturel $S(N)$ est divisible par 111.

Question 3.

Soit maintenant un entier naturel n quelconque et $N=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0}$ un entier naturel dont l'écriture décimale comporte $n+1$ chiffres.

On a :

$$\begin{aligned}N &= \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0} \\ &= a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0 \\ &= a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_1 \times 10 + a_0\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}S(N) &= \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0} + \overline{a_0 a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} + \overline{a_1 a_0 a_n \dots a_3 a_2} + \dots + \overline{a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_0 a_n} \\ &= a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_1 \times 10 + a_0 \\ &\quad + a_0 \times 10^n + a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \dots + a_2 \times 10 + a_1 \\ &\quad + a_1 \times 10^n + a_0 \times 10^{n-1} + a_n \times 10^{n-2} + \dots + a_3 \times 10 + a_2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + a_{n-1} \times 10^n + a_{n-2} \times 10^{n-1} + a_{n-3} \times 10^{n-2} + \dots + a_0 \times 10 + a_n \\ &= a_n \times \left(10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1\right) + a_{n-1} \times \left(10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1\right) \\ &\quad + \dots + a_1 \times \left(10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1\right) + a_0 \times \left(10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1\right) \\ &= \left(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0\right) \times \left(10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1\right)\end{aligned}$$

La somme $10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1$ est égale au nombre dont l'écriture décimale comporte $n+1$ chiffres « 1 » (il s'agit donc d'un répunit) :

$$10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1 = \underbrace{11\dots111}_{\substack{n+1 \text{ fois} \\ \text{le chiffre "1"}}}$$

On en déduit que $S(N)$ est bien divisible par $\underbrace{11\dots111}_{\substack{n+1 \text{ fois} \\ \text{le chiffre "1"}}}$.

> Pour tout entier naturel n et tout entier naturel $N = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}$,
> l'entier naturel $S(N)$ est divisible par $\underbrace{11\dots111}_{\substack{n+1 \text{ fois} \\ \text{le chiffre "1"}}}$.

Question 4.

On a facilement : $32\,219 = 11 \times 2\,929 = 11 \times 29 \times 101 = 29 \times 1111$.
On va essayer de se ramener à la situation précédente avec $n = 3$ puisque 1111 comporte 4 chiffres « 1 ».
On cherche donc un entier N dont l'écriture décimale est de la forme $\overline{abcd}$.
Pour un tel entier, on a : $S(N) = (a+b+c+d) \times 1111$.
On va donc ici chercher $N = \overline{abcd}$ tel que $a+b+c+d$ soit égal à 29 (avec $a \neq 0$).

On peut, par exemple, choisir : $a = 6$, $b = 9$, $c = 5$ et $d = 9$.
L'entier $N = 6\,959$ est une solution de l'équation $S(N) = 32\,219$.

On peut remarquer qu'à partir de cette solution, on peut en donner $4! - 1 = 23$ autres obtenues en permutant les quatre chiffres *a*, *b*, *c* et *d*. (il y en aura moins si l'un au moins des chiffres *b*, *c* ou *d* est nul). Par exemple : $6\,995$ et $5\,699$ sont également des solutions de l'équation $S(N) = 32\,219$.

L'entier $N = 6\,959$ est une solution de l'équation $S(N) = 32\,219$.