Montrer que pour tout n entier naturel, $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7.

Analyse

On mène, classiquement, un raisonnement par récurrence.

Résolution

On définit :

$$\mathscr{P}_n : \text{« } 3^{2n+1}+2^{n+2} \text{ est divisible par 7 »}$$

Initialisation

Pour $n=0$, on a : $3^{2n+1}+2^{n+2}=3^{2\times 0+1}+2^{0+2}=3^1+2^2=3+4=7$ qui est bien divisible par 7.
La propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.

Hérédité

Soit n un entier naturel quelconque fixé.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et on s'intéresse à $\mathscr{P}_{n+1}$.
Soit donc l'entier $3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}=3^{2n+3}+2^{n+3}$.
On a :

$$3^{2n+3}+2^{n+3}=3^2\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est un multiple de 7. Il existe donc un entier k tel que : $3^{2n+1}+2^{n+2}=7k$, soit : $3^{2n+1}=7k-2^{n+2}$.
Dans ces conditions, il vient :

$$\begin{aligned}3^{2n+3}+2^{n+3}&=3^2\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}\\&=3^2\times\left(7k-2^{n+2}\right)+2\times 2^{n+2}\\&=3^2\times 7k-3^2\times 2^{n+2}+2\times 2^{n+2}\\&=3^2\times 7k+2^{n+2}\left(2-3^2\right)\\&=3^2\times 7k+2^{n+2}\times(-7)\\&=7\times\left(3^2\times k-2^{n+2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, l'entier $3^{2n+3}+2^{n+3}$ est divisible par 7. La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion

On déduit de ce qui précède que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

Résultat final

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ est divisible par } 7$$