

Montrer que pour tout entier n , le produit $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 2 et par 3.

Analyse

La parité du produit $n(n+1)(2n+1)$ ne pose pas de difficulté particulière dès lors que l'on s'intéresse au produit $n(n+1)$. Pour montrer la divisibilité de $n(n+1)(2n+1)$ par 3, on peut utiliser le fait que tout entier n est de l'une des trois formes : $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$.

Résolution

Pour tout entier naturel n , les entiers n et $n+1$ étant consécutifs, l'un d'eux est pair et on en déduit immédiatement qu'il en va de même pour leur produit et donc pour le produit $n(n+1)(2n+1)$.

Pour étudier la divisibilité de $n(n+1)(2n+1)$, nous raisonnons par disjonction de cas selon le reste de la division euclidienne de n par 3.

Si $n = 3k$.

Alors $n(n+1)(2n+1) = 3k(3k+1)(6k+1)$ est bien un multiple de 3.

Si $n = 3k+1$.

Alors :

$$\begin{aligned}n(n+1)(2n+1) &= (3k+1)(3k+2)(2(3k+1)+1) \\ &= (3k+1)(3k+2)(6k+3) \\ &= (3k+1)(3k+2) \times 3(2k+1)\end{aligned}$$

est bien un multiple de 3.

Si $n = 3k+2$.

Alors :

$$\begin{aligned}n(n+1)(2n+1) &= (3k+2)(3k+3)(2(3k+2)+1) \\ &= (3k+2) \times 3(k+1)(6k+5)\end{aligned}$$

est bien un multiple de 3.

Résultat final

Pour tout entier n , le produit $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 2 et par 3.

Complément

Pour tout entier naturel n , on a le résultat classique :

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ainsi, le résultat obtenu ci-dessus nous permet de vérifier que le rapport $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est bien un entier ...