Déterminer, suivant l'entier *n*, le reste de la division euclidienne de n^7+4n+1 par 8.

Analyse

On évitera de traiter « froidement » les 8 cas possibles pour *n* correspondant aux 8 restes possibles de la division euclidienne de *n* par 8. Dans un premier temps, il convient de regarder attentivement l'expression n^7+4n+1 ou de tester quelques valeurs de *n* positives afin d'engager une première discussion relative à la parité de *n*.

Résolution

→ Si *n* est pair.

On suppose donc : $n=2k$ où *k* est un entier.
On a alors : $n^7+4n+1=(2k)^7+4\times 2k+1=128k^7+8k+1=8k\left(16k^6+1\right)+1$ et on en tire immédiatement que le reste de la division euclidienne de n^7+4n+1 par 8 est égal à 1.

→ Si *n* est impair.

Dans ce cas, *n* peut être congru à 1, 3, 5 ou 7 modulo 8 et nous allons étudier ces quatre situations.

- $n\equiv 1(8)$

  Alors $n^7\equiv 1^7\,(8)$, soit $n^7\equiv 1(8)$ et $4n\equiv 4\,(8)$.

  On en déduit $n^7+4n+1\equiv 1+4+1(8)$, soit $n^7+4n+1\equiv 6\,(8)$.

  Comme $0\le 6<8$, on en déduit que le reste de la division euclidienne de n^7+4n+1 par 8 est dans ce cas égal à 6.

- $n\equiv 3(8)$

  Alors $n^7\equiv 3^7\,(8)$, soit $n^7\equiv 2187\,(8)$. Mais $2187\equiv 3(8)$ donc $n^7\equiv 3(8)$(remarque : le calcul de 3^7 n'est en rien obligatoire dès lors que l'on remarque que $3^2=9\equiv 1(8)$).

  Par ailleurs $4n\equiv 12\,(8)$, soit $4n\equiv 4\,(8)$.

  On en déduit $n^7+4n+1\equiv 3+4+1(8)$, soit $n^7+4n+1\equiv 0\,(8)$.

  Dans ce cas, n^7+4n+1 est divisible par 8.

- $n \equiv 5\,(8)$

  Alors $n^7 \equiv 5^7\,(8)$. Comme $5 \equiv -3\,(8)$ alors $5^7 \equiv (-3)^7\,(8)$, soit $5^7 \equiv -3^7\,(8)$. Mais on a vu au cas précédent que l'on avait $3^7 = 2187 \equiv 3\,(8)$. On en déduit $-3^7 \equiv -3\,(8)$.

  Par ailleurs $4n \equiv 20\,(8)$, soit $4n \equiv 4\,(8)$.

  On en déduit $n^7 + 4n + 1 \equiv -3 + 4 + 1\,(8)$, soit $n^7 + 4n + 1 \equiv 2\,(8)$.

  Comme $0 \leq 2 < 8$, on en déduit que le reste de la division euclidienne de $n^7 + 4n + 1$ par 8 est dans ce cas égal à 2.

- $n \equiv 7\,(8)$

  En remarquant que dans ce cas on a $n \equiv -1\,(8)$, il vient : $n^7 \equiv (-1)^7\,(8)$, soit $n^7 \equiv -1\,(8)$.

  Par ailleurs : $4n \equiv -4\,(8)$, soit $4n \equiv 4\,(8)$.

  On en déduit $n^7 + 4n + 1 \equiv -1 + 4 + 1\,(8)$, soit $n^7 + 4n + 1 \equiv 4\,(8)$.

  Comme $0 \leq 4 < 8$, on en déduit que le reste de la division euclidienne de $n^7 + 4n + 1$ par 8 est dans ce cas égal à 4.

En définitive, les restes possibles de la division euclidienne de $n^7 + 4n + 1$ par 8 sont 0, 1, 2, 4 et 6.

Résultat final

Dans la division euclidienne de $n^7 + 4n + 1$ par 8, le reste vaut :

- 0 si $n \equiv 3\,(8)$
- 1 si *n* est pair.
- 2 si $n \equiv 5\,(8)$
- 4 si $n \equiv 7\,(8)$
- 6 si $n \equiv 1\,(8)$