Après avoir déterminé les restes possibles, suivant l'entier naturel *n*, de la division euclidienne de 3^n par 7, déterminer celui de la division euclidienne de $10\,958^{679}$ par 7.

Analyse

Une démarche classique où le travail préalable permet de « remplacer » 10 958 par un nombre nettement plus petit ! On se gardera de « se mélanger les pinceaux » entre les modulos …

Résolution

On a facilement :

$$\begin{gathered}
3^0=1\equiv 1\,(7)\\
\Rightarrow 3^1\equiv 3\,(7)\\
\Rightarrow 3^2\equiv 9\,(7)\text{ soit }3^2\equiv 2\,(7)\\
\Rightarrow 3^3\equiv 6\,(7)\\
\Rightarrow 3^4\equiv 18\,(7)\text{ soit }3^4\equiv 4\,(7)\\
\Rightarrow 3^5\equiv 12\,(7)\text{ soit }3^5\equiv 5\,(7)\\
\Rightarrow 3^6\equiv 15\,(7)\text{ soit }3^6\equiv 1\,(7)
\end{gathered}$$

On va ainsi raisonner selon le reste de la division euclidienne de *n* par 6.

- Si $n\equiv 0\,(6)$

  Dans ce cas : $n=6k$ (*k* entier naturel). Alors $3^n=3^{6k}=\left(3^6\right)^k$.

  Or, $3^6=729=728+1\equiv 1\,(7)$. Donc : $3^n=\left(3^6\right)^k\equiv 1^k\,(7)$, soit $3^n\equiv 1\,(7)$.

- Si $n\equiv 1\,(6)$

  Dans ce cas : $n=6k+1$ (*k* entier naturel). Alors $3^n=3^{6k+1}=3\times 3^{6k}$.
  Comme $3^{6k}\equiv 1\,(7)$ alors $3^n=3\times 3^{6k}\equiv 3\,(7)$.

- Si $n\equiv 2\,(6)$

  Dans ce cas : $n=6k+2$ (*k* entier naturel). Alors $3^n=3^{6k+2}=3\times 3^{6k+1}$.
  Comme $3^{6k+1}\equiv 3\,(7)$ alors $3^n=3\times 3^{6k+1}\equiv 9\,(7)$, soit $3^n\equiv 2\,(7)$.

- Si $n \equiv 3\,(6)$

  Dans ce cas : $n = 6k+3$ (k entier naturel). Alors $3^n = 3^{6k+3} = 3\times 3^{6k+2}$.
  Comme $3^{6k+2} \equiv 2\,(7)$ alors $3^n = 3\times 3^{6k+2} \equiv 6\,(7)$.

- Si $n \equiv 4\,(6)$

  Dans ce cas : $n = 6k+4$ (k entier naturel). Alors $3^n = 3^{6k+4} = 3\times 3^{6k+3}$.
  Comme $3^{6k+3} \equiv 6\,(7)$ alors $3^n = 3\times 3^{6k+3} \equiv 18\,(7)$, soit $3^n \equiv 4\,(7)$.

- Si $n \equiv 5\,(6)$

  Dans ce cas : $n = 6k+5$ (k entier naturel). Alors $3^n = 3^{6k+5} = 3\times 3^{6k+4}$.
  Comme $3^{6k+4} \equiv 4\,(7)$ alors $3^n = 3\times 3^{6k+4} \equiv 12\,(7)$, soit $3^n \equiv 5\,(7)$.

Ainsi :

Le reste de la division euclidienne de 3^n (n entier naturel) par 7 est égal à :
- 1 si $n \equiv 0\,(6)$
- 3 si $n \equiv 1\,(6)$
- 2 si $n \equiv 2\,(6)$
- 6 si $n \equiv 3\,(6)$
- 4 si $n \equiv 4\,(6)$
- 5 si $n \equiv 5\,(6)$

En effectuant la division euclidienne de 10 958 par 7, on obtient facilement :

$$10\,958 = 7\times 1\,565 + 3$$

On a donc : $10\,958 \equiv 3\,(7)$ puis : $10\,958^{679} \equiv 3^{679}\,(7)$.

On cherche alors le reste de la division euclidienne de 679 par 6.
On a facilement : $679 = 6\times 113 + 1$, d'où $679 \equiv 1\,(6)$.
D'après ce qui précède, on en déduit : $3^{679} \equiv 3\,(7)$ et, finalement : $10\,958^{679} \equiv 3\,(7)$.
Le reste de la division euclidienne de $10\,958^{679}$ par 7 est égal à 3.

Résultat final

Le reste de la division euclidienne de $10\,958^{679}$ par 7 est égal à 3.