Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls.

1. Montrer que $a \wedge (b \vee a) = a$ et $a \vee (b \wedge a) = a$.
2. Montrer que si a et b sont premiers entre eux, on a :

$$a \wedge (bc) = a \wedge c \text{ et } a \vee (bc) = b(a \vee c)$$

Analyse

La première question est immédiate. Dans la seconde, la deuxième égalité découle directement de la première que l'on établit en montrant, par exemple, que les deux PGCD considérés se divisent l'un l'autre.

Résolution

Question 1.

Comme a divise $b \vee a$, on a immédiatement : $a \wedge (b \vee a) = a$.

De façon similaire, comme $b \wedge a$ est un diviseur de a, on a immédiatement : $a \vee (b \wedge a) = a$.

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, a \wedge (b \vee a) = a \text{ et } a \vee (b \wedge a) = a.$$

Question 2.

On suppose ici que l'on a : $a \wedge b = 1$;

Posons $d = a \wedge c$ et $d' = a \wedge (bc)$.

Comme d divise c, d divise le produit bc.
d divise a et d divise bc. On en déduit immédiatement que d' divise d : $\boxed{d' | d}$.

Comme $d' = a \wedge (bc)$, d' divise le produit *bc*. Mais comme *a* et *b* sont premiers entre eux, il en va de même pour d' et *b* (sans quoi *a* et *b* ne seraient pas premiers entre eux). Le théorème de GAUSS nous permet alors d'affirmer que d' divise *c*.
d' divise *a* et d' divise *c*. On en déduit immédiatement que *d* divise d' : $\boxed{d \mid d'}$.

On a ainsi l'égalité cherchée : $d = d'$.

Pour tout triplet (a, b, c) dans $(\mathbb{N}^*)^3$, si $a \wedge b = 1$ alors $a \wedge c = a \wedge (bc)$.

D'après le résultat précédent, nous avons $a \wedge c = a \wedge (bc) = d$ et nous pouvons poser :

$$a = d \times a',\ c = d \times c' \text{ et } bc = x = d \times x'$$

Il vient alors :

$$a \vee (bc) = a \vee x = d \times a' \times x' = a' \times x = a' \times b \times c$$

et :

$$b \times (a \vee c) = b \times d \times a' \times c' = b \times a' \times (dc') = b \times a' \times c = a' \times b \times c$$

On a bien l'égalité cherchée.

Pour tout triplet (a, b, c) dans $(\mathbb{N}^*)^3$, si $a \wedge b = 1$ alors $a \vee (bc) = b \times (a \vee c)$.