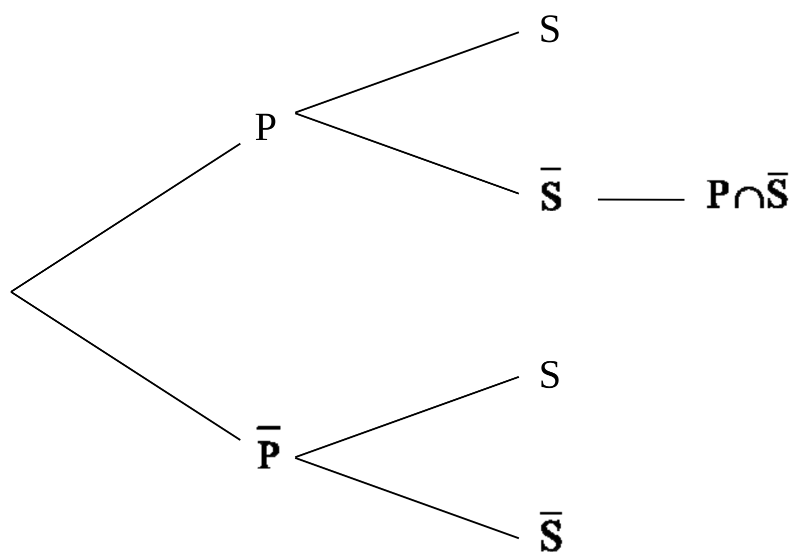
On considère l'arbre suivant :



On donne :

$$p(\mathrm{P})=\frac{3}{5},\ p\left(\mathrm{P}\cap\overline{\mathrm{S}}\right)=\frac{2}{7}\ \text{ et }\ p\left(\mathrm{S}|\overline{\mathrm{P}}\right)=\frac{2}{9}$$

1. Compléter l'arbre ci-dessus ;
2. Calculer $p(\mathrm{S})$;
3. Les événements P et S sont-ils indépendants ?

Analyse

Il s'agit d'un exercice qui permet de passer en revue les principales connaissances et types de calculs en matière de probabilité conditionnelle.

Résolution

Question 1.

Dans un premier temps, nous allons calculer les diverses probabilités devant figurer dans l'arbre.

→ Calcul de $p\left(\overline{\mathrm{P}}\right)$.

On a : $p\left(\overline{\text{P}}\right)=1-p(\text{P})=1-\frac{3}{5}=\boxed{\frac{2}{5}}$

→ Calcul de $p\left(\overline{\text{S}}\,|\,\text{P}\right)$.

On a : $p\left(\overline{\text{S}}\,|\,\text{P}\right)=\frac{p\left(\overline{\text{S}}\cap\text{P}\right)}{p(\text{P})}=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}}=\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}=\boxed{\frac{10}{21}}$

→ Calcul de $p(\text{S}\,|\,\text{P})$.

On peut écrire immédiatement (à partir d'un sommet de l'arbre pondéré du premier niveau, la somme des probabilités conditionnelles est égale à 1) : $p(\text{S}\,|\,\text{P})+p\left(\overline{\text{S}}\,|\,\text{P}\right)=1$.

On peut aussi retrouver ce résultat en notant que les événements P et $\overline{\text{P}}$ forment une partition de l'univers. On a alors :

$$\begin{aligned}p(\text{P})&=p(\text{P}\cap\text{S})+p\left(\text{P}\cap\overline{\text{S}}\right)\\&=p(\text{S}\cap\text{P})+p\left(\overline{\text{S}}\cap\text{P}\right)\\&=p(\text{S}\,|\,\text{P})\times p(\text{P})+p\left(\overline{\text{S}}\cap\text{P}\right)\times p(\text{P})\\&=\left(p(\text{S}\,|\,\text{P})+p\left(\overline{\text{S}}\cap\text{P}\right)\right)\times p(\text{P})\end{aligned}$$

On retrouve le résultat.

Il vient alors : $p(\text{S}\,|\,\text{P})=1-p\left(\overline{\text{S}}\,|\,\text{P}\right)=1-\frac{10}{21}=\boxed{\frac{11}{21}}$

→ Calcul de $p(\text{P}\cap\text{S})$.

On utilise : $p(\text{P})=p(\text{P}\cap\text{S})+p\left(\text{P}\cap\overline{\text{S}}\right)$.

Avec $p\left(\text{P}\cap\overline{\text{S}}\right)=\frac{2}{7}$ et $p(\text{P})=\frac{3}{5}$, il vient :

$$p(\text{P}\cap\text{S})=p(\text{P})-p\left(\text{P}\cap\overline{\text{S}}\right)=\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{21-10}{35}=\boxed{\frac{11}{35}}$$

→ Calcul de $p\left(\overline{\text{S}}\,|\,\overline{\text{P}}\right)$.

On a : $p\left(\text{S}\,|\,\overline{\text{P}}\right)+p\left(\overline{\text{S}}\,|\,\overline{\text{P}}\right)=1$. Or, on a : $p\left(\text{S}\,|\,\overline{\text{P}}\right)=\frac{2}{9}$.

On en déduit : $p\left(\overline{\text{S}}\,|\,\overline{\text{P}}\right)=1-\frac{2}{9}=\boxed{\frac{7}{9}}$

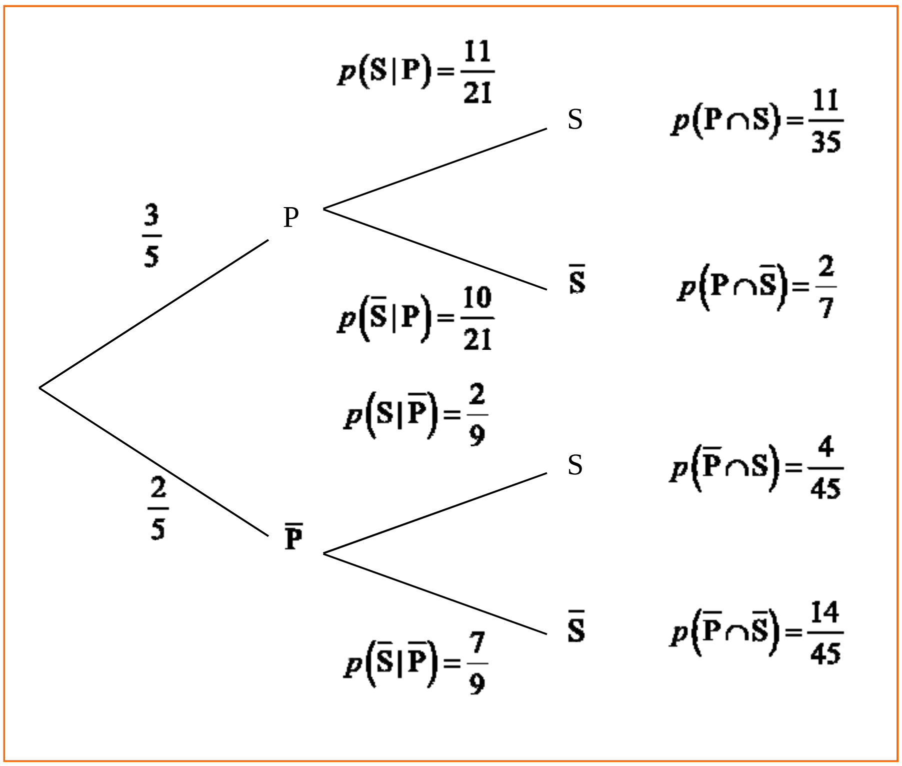
→ Calcul de $p\left(\overline{\mathrm{P}}\cap\mathrm{S}\right)$.

On a : $p\left(\overline{\mathrm{P}}\cap\mathrm{S}\right)=p\left(\mathrm{S}\,|\,\overline{\mathrm{P}}\right)\times p\left(\overline{\mathrm{P}}\right)=\frac{2}{9}\times\frac{2}{5}=\boxed{\frac{4}{45}}$

→ Calcul de $p\left(\overline{\mathrm{P}}\cap\overline{\mathrm{S}}\right)$.

On a : $p\left(\overline{\mathrm{P}}\cap\overline{\mathrm{S}}\right)=p\left(\overline{\mathrm{S}}\,|\,\overline{\mathrm{P}}\right)\times p\left(\overline{\mathrm{P}}\right)=\frac{7}{9}\times\frac{2}{5}=\boxed{\frac{14}{45}}$

On peut alors fournir l'arbre complété suivant :



Question 2.

On a : $p\left(\mathrm{S}\right)=p\left(\mathrm{S}\cap\mathrm{P}\right)+p\left(\mathrm{S}\cap\overline{\mathrm{P}}\right)=\frac{11}{35}+\frac{4}{45}=\frac{99+28}{315}=\frac{127}{315}$.

$$p\left(\mathrm{S}\right)=\frac{127}{315}$$

Question 3.

On a calculé à la question 1. : $p\left(\mathrm{P}\cap\mathrm{S}\right)=\frac{11}{35}$.

Par ailleurs, on a : $p(\mathrm{P})=\frac{3}{5}$ et, d'après la question précédente, $p(\mathrm{S})=\frac{127}{315}$.

On en déduit : $p(\mathrm{S})\,p(\mathrm{P})=\frac{127}{315}\times\frac{3}{5}=\frac{127}{525}\neq\frac{11}{35}$.

Comme $p(\mathrm{S})\,p(\mathrm{P})\neq p(\mathrm{P}\cap\mathrm{S})$, on en déduit que les événements P et S ne sont pas indépendants.

Les événements P et S ne sont pas indépendants.