Une urne contient 3 boules vertes, 4 boules rouges, 2 boules noires et 7 boules jaunes.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne. Calculer la probabilité que les boules tirées soient de la même couleur.
2. Même question sachant que l'on tire cette fois trois boules de l'urne.

Analyse

Il s'agit d'un exercice typique de tirages successifs (bien que le tirage des trois boules soit présenté comme un tirage simultané) sans remise. Il convient d'avoir une vision claire de l'arbre correspondant à chacune des deux expériences aléatoires mentionnées. Représenter ces arbres permet probablement de répondre plus rapidement aux questions posées.

Résolution

Question 1.

Nous pouvons représenter la situation à l'aide d'un arbre (voir page suivante) :

Une issue de l'univers peut être représentée par un couple de lettres choisies dans l'ensemble $\{\mathrm{V}, \mathrm{R}, \mathrm{N}, \mathrm{J}\}$. Par exemple : (R, J) correspond à l'issue : « la première boule tirée est rouge, la deuxième boule tirée est jaune ».

Notons alors A l'événement « les boules tirées sont de la même couleur ».
Les issues qui réalisent A sont les couples : (V, V), (R, R), (N, N) et (J, J).

On a donc : $p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{V}, \mathrm{V}) + p(\mathrm{R}, \mathrm{R}) + p(\mathrm{N}, \mathrm{N}) + p(\mathrm{J}, \mathrm{J})$.

Si on note V_1 l'événement « la première boule est verte » et V_2 l'événement la deuxième boule est verte », on a : $p(\mathrm{V}, \mathrm{V}) = p(\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2) = p(\mathrm{V}_2|\mathrm{V}_1) \times p(\mathrm{V}_1)$ (cf. la branche en surépaisseur sur l'arbre). Soit :

$$p(\mathrm{V}, \mathrm{V}) = p(\mathrm{V}_2|\mathrm{V}_1) \times p(\mathrm{V}_1) = \frac{2}{15} \times \frac{3}{16} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times 5 \times \cancel{2} \times 8} = \boxed{\frac{1}{40}}$$

En procédant de façon analogue, on obtient :

$$p(\mathrm{R},\mathrm{R}) = p(\mathrm{R}_2|\mathrm{R}_1)\times p(\mathrm{R}_1) = \frac{3}{15}\times\frac{4}{16} = \frac{\cancel{3}\times\cancel{4}}{\cancel{3}\times 5\times\cancel{4}\times 4} = \boxed{\frac{1}{20}}$$

$$p(\mathrm{N},\mathrm{N}) = p(\mathrm{N}_2|\mathrm{N}_1)\times p(\mathrm{N}_1) = \frac{1}{15}\times\frac{2}{16} = \frac{\cancel{2}}{15\times\cancel{2}\times 8} = \boxed{\frac{1}{120}}$$

$$p(\mathrm{N},\mathrm{N}) = p(\mathrm{N}_2|\mathrm{N}_1)\times p(\mathrm{N}_1) = \frac{6}{15}\times\frac{7}{16} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{3}\times 7}{\cancel{3}\times 5\times\cancel{2}\times 8} = \boxed{\frac{7}{40}}$$

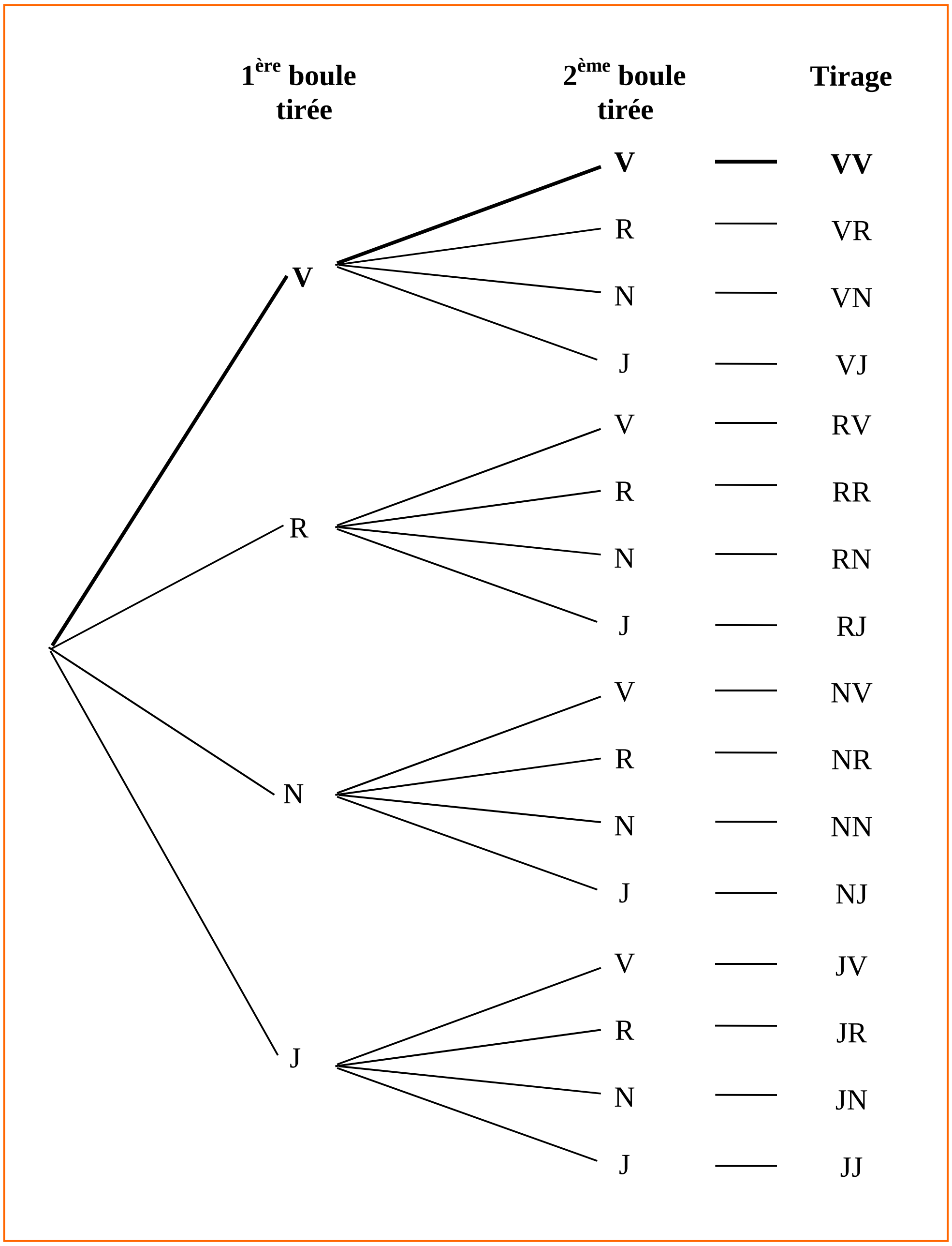

Figure 1. Arbre représentant la première expérience aléatoire.

On a alors :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{A}) &= p(\mathrm{V, V}) + p(\mathrm{R, R}) + p(\mathrm{N, N}) + p(\mathrm{J, J}) \\ &= \frac{1}{40} + \frac{1}{20} + \frac{1}{120} + \frac{7}{40} \\ &= \frac{3+6+1+21}{120} \\ &= \frac{31}{120} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{p(\mathrm{A}) = \frac{31}{120}}$$

Question 2.

Dans cette question, on prend garde au fait que l'urne ne contient que 2 boules noires.

Si on note alors B l'événement « les trois boules tirées sont de la même couleur », il vient :

$$p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{V, V, V}) + p(\mathrm{R, R, R}) + p(\mathrm{J, J, J})$$

Soit :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{B}) &= p(\mathrm{V, V, V}) + p(\mathrm{R, R, R}) + p(\mathrm{J, J, J}) \\ &= \frac{1}{14} \times \frac{2}{15} \times \frac{3}{16} + \frac{2}{14} \times \frac{3}{15} \times \frac{4}{16} + \frac{5}{14} \times \frac{6}{15} \times \frac{7}{16} \\ &= \frac{1}{560} + \frac{1}{140} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{1+4+35}{560} \\ &= \frac{40}{560} \\ &= \frac{1}{14} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{p(\mathrm{B}) = \frac{1}{14}}$$