Une urne contient des boules rouges et vertes indiscernables au toucher. On choisit 3 boules au hasard sans remise.

1. Dans un premier temps, on suppose que l'urne contient 5 boules rouges et 4 boules vertes. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule verte ?

2. Dans un deuxième temps, on suppose que l'urne contient n boules rouges et p boules vertes ($n \geq 3$ et $p \geq 3$).

   a. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule verte ? On note $u(n, p)$ cette probabilité.

   b. On suppose p fixé. Peut-on conjecturer la valeur de $\lim_{n \to +\infty} u(n, p)$?
   Valider la conjecture à l'aide d'un calcul.

Analyse

Un exercice où l'on met en œuvre les coefficients binomiaux (et un calcul de limite simple) sans pour autant parler de loi binomiale !

Résolution

Question 1.

Commençons par déterminer le nombre N de tirages possibles.
Il s'agit ici du nombre de façons de choisir 3 boules parmi un total de $5+4=9$. Il vient donc immédiatement : $\mathrm{N} = \binom{9}{3} = \dfrac{9!}{6! \times 3!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 3 \times 4 \times 7 = 84$.

Notons A l'événement « Obtenir au moins une boule verte » et $p(\mathrm{A})$ la probabilité correspondante.

L'événement contraire, $\overline{\mathrm{A}}$, correspond à « Ne pas obtenir de boule verte ». Le nombre d'issues réalisant $\overline{\mathrm{A}}$ est égal aux nombre de choix de trois boules rouges parmi les 5 disponibles soit : $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$.

On a donc : $p(\mathrm{A}) = 1 - \frac{10}{84} = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$.

La probabilité d'obtenir au moins une boule verte est égale à $\frac{37}{42}$.

Question 2.a.

On raisonne comme précédemment mais on a cette fois :

- Le nombre N de tirages possibles (choix de 3 boules parmi un total de $n+p$) :

$$\mathrm{N} = \binom{n+p}{3} = \frac{(n+p)!}{(n+p-3)! \times 3!} = \frac{(n+p) \times (n+p-1) \times (n+p-2)}{6}$$

- Le nombre de possibilités de choisir 3 boules parmi les *n* boules rouges :

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)! \times 3!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6}$$

- La probabilité de l'événement « Obtenir au moins une boule verte » :

$$u(n,p) = 1 - \frac{\frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6}}{\frac{(n+p) \times (n+p-1) \times (n+p-2)}{6}} = 1 - \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{(n+p) \times (n+p-1) \times (n+p-2)}$$

La probabilité d'obtenir au moins une boule verte est égale à :

$$u(n,p) = 1 - \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{(n+p) \times (n+p-1) \times (n+p-2)}$$

Question 2.b.

Supposons donc le nombre de boules vertes fixé (il y en a *p*) et imaginons que l'on augmente le nombre de boules rouges (il y en a *n*). Dans la mesure où on continue de tirer 3 boules, on va obtenir de moins en moins souvent une boule verte et on peut conjecturer :

$$\lim_{n \to +\infty} u(n,p) = 0$$

A partir du résultat obtenu à la question précédente, on peut poser :

$$\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{(n+p)\times(n+p-1)\times(n+p-2)}=f(n)$$

Où *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x)=\dfrac{x\times(x-1)\times(x-2)}{(x+p)\times(x+p-1)\times(x+p-2)}$.

La fonction *f* étant une fonction rationnelle, rapport de deux fonction polynôme de degré 3, on a immédiatement :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\times(x-1)\times(x-2)}{(x+p)\times(x+p-1)\times(x+p-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

D'où : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{(n+p)\times(n+p-1)\times(n+p-2)}=\lim_{n\to+\infty} f(n)=1$ et, finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} u(n,p)=\lim_{n\to+\infty}\left[1-f(n)\right]=1-1=0$$

On a bien :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u(n,p)=0}$$