1. Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 0$ on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

2. On dispose de *n* boules numérotées de 1 à *n*. On les place toutes au hasard dans *n* boîtes (chaque boîte pouvant contenir de 0 à *n* boules). On désigne par P_n la probabilité que chaque boîte contienne exactement une boule. Montrer que $\mathrm{P}_n = \dfrac{n!}{n^n}$.
3. En utilisant 1. Montrer que pour tout entier $n > 0$ on a :

$$\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_{n+1}} \geq 2$$

En déduire que $\mathrm{P}_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Quelle est la limite de P_n quand *n* tend vers $+\infty$.

(BAC C – Lille – 1987)

Analyse

Un joli mélange de probabilités et de suites. Le résultat final ($\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n = 0$) est assez intuitif d'un point de vue probabiliste et correspond à la limite classique (comparaison) : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.
Cet exercice en fournit une démonstration à l'aide d'outils du niveau de la classe de Terminale mais quelques aspects sont plus proches d'une 1ère année de CPGE EC.

Résolution

Question 1.

On mène un raisonnement par récurrence.

Initialisation.

Pour $n = 0$, on a, pour tout réel *x* positif : $(1+x)^n = (1+x)^0 = 1$ et $1+nx = 1+0\times x = 1$.

L'égalité est vérifiée.
La propriété est donc vraie au rang 0, elle est initialisée.

Hérédité.

Soit n un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que la propriété est vraie au rang n : $\forall x \in \mathbb{R}_+, (1+x)^n \geq 1+nx$.
Qu'en est-il au rang $n+1$?

Il convient de comparer $(1+x)^{n+1}$ et $1+(n+1)x$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\times(1+x)^n \geq (1+x)\times(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

On a bien : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.
La propriété est donc vraie au rang $n+1$, elle est héréditaire.

Etant initialisée et héréditaire, la propriété est donc vraie pour tout entier naturel n.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, (1+x)^n \geq 1+nx}$$

Question 2.

Combien y a-t-il de façons N de répartir n boules dans n boîtes ?

Pour chaque boule, on a n possibilités puisque l'on peut placer cette boule dans l'une quelconque des n boîtes. Puisque l'on raisonne de la sorte sur chacune des n boules, on a finalement : $\mathrm{N} = \underbrace{n\times n\times\ldots\times n}_{\text{le facteur "}n\text{" apparaît } n \text{ fois}} = n^n$. D'un point de vue ensembliste, il s'agit du nombre d'applications d'un ensemble à n éléments (représentant les n boules) dans un ensemble à n éléments (représentant les n boîtes).

Intéressons-nous maintenant au nombre x de façons de répartir les boules dans les n boîtes de telle sorte que chaque boîte contienne une boule et une seule.

On a classiquement :

- n possibilités pour la première boule.
- Pour chacune des n possibilités précédentes, on a $n-1$ possibilités pour la deuxième boule.
- Pour chacune des $n\times(n-1)$ possibilités précédentes, on a $n-2$ possibilités pour la troisième boule.
- …
- Pour chacune des $n\times(n-1)\times\ldots\times 2$ possibilités précédentes, on a 1 seule possibilité pour la dernière boule (une seule boîte vide disponible).

En définitive, il y a $n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1 = n!$ façons de répartir les boules dans les boîtes de telle sorte que chaque boîte contienne une boule et une seule. D'un point de vue ensembliste, il s'agit du nombre de bijections d'un ensemble à *n* éléments (représentant les *n* boules) dans un ensemble à *n* éléments (représentant les *n* boîtes).

Finalement : $\mathrm{P}_n = \dfrac{x}{N} = \dfrac{n!}{n^n}$.

On a bien :

$$\boxed{\mathrm{P}_n = \frac{n!}{n^n}}$$

Question 3.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on a :

$$\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_{n+1}} = \frac{\dfrac{n!}{n^n}}{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \frac{n!}{n^n}\times\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{n^n}\times\frac{\cancel{(n+1)}\times(n+1)^n}{\cancel{(n+1)}\times\cancel{n!}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

En utilisant alors le résultat de la première question avec $x = \dfrac{1}{n} > 0$, il vient :

$$\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\times\frac{1}{n} = 2$$

On a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_{n+1}} \geq 2}$$

On tire immédiatement de ce résultat : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{\mathrm{P}_{n+1}}{\mathrm{P}_n} \leq \dfrac{1}{2}$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a alors :

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{P_n}{P_{n-1}} \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{P_{n-1}}{P_{n-2}} \leq \dfrac{1}{2} \\ \vdots \\ \dfrac{P_3}{P_2} \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{P_2}{P_1} \leq \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} n-1 \text{ inégalités}$$

Les membres de ces inégalités étant strictement positifs, on peut les multiplier membre à membre et on obtient :

$$\frac{P_n}{\cancel{P_{n-1}}} \times \frac{\cancel{P_{n-1}}}{\cancel{P_{n-2}}} \times \ldots \times \frac{\cancel{P_3}}{\cancel{P_2}} \times \frac{\cancel{P_2}}{P_1} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{P_n}{P_1} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

P_1 est la probabilité qu'une boîte contienne exactement la seule boule que … l'on y place !
Elle vaut naturellement 1 et on a finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\},\ P_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}}$$

La suite $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ dans $]-1\,;+1[$. Elle est donc convergente de limite nulle.

Comme on a : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\},\ 0 \leq P_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, il vient (théorème des gendarmes) : $\lim_{n\to+\infty} P_n = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n = 0}$$