

Soit Ω un univers probabilisé.
Soit A et B deux événements de Ω .

Montrer que l'on a :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow P(A \cap B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap B) \times P(A \cap \bar{B})$$

Analyse

La condition nécessaire est assez simple. Pour la condition suffisante, on utilise à l'envi les propriétés élémentaires des probabilités relatives aux événements contraires.

Résolution



On suppose A et B indépendants. On a donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Nous allons commencer par montrer que les événements \bar{A} et B sont également indépendants.

Les événements A et \bar{A} formant un système complet d'événements, on a immédiatement :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

Il en résulte, en tenant compte de l'indépendance de A et B :

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= (1 - P(A)) \times P(B) \\ &= P(\bar{A}) \times P(B) \end{aligned}$$

On en conclut que les événements \bar{A} et B sont indépendants.

Les événements A et B jouant des rôles symétriques, on en déduit aussi que les événements A et \bar{B} sont indépendants.

Enfin, en appliquant le résultat aux événements A et \bar{B} , on en déduit que les événements \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.

On a alors :

$$\begin{aligned}P(A \cap B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(A) \times P(B) \times P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) \\P(\bar{A} \cap B) \times P(A \cap \bar{B}) &= P(\bar{A}) \times P(B) \times P(A) \times P(\bar{B})\end{aligned}$$

Finalement : $P(A \cap B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap B) \times P(A \cap \bar{B})$.

En définitive, si les événements A et B sont indépendants, alors on a :

$$P(A \cap B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap B) \times P(A \cap \bar{B})$$



On suppose que l'on a : $P(A \cap B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap B) \times P(A \cap \bar{B})$

Dans un premier temps, nous traitons le cas particulier (et classique !) : $P(A) = 0$.

Comme $A \cap B \subset A$, on a $P(A \cap B) \leq P(A)$ et donc $P(A \cap B) = 0$.

Ainsi $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ et les événements A et B sont bien indépendants.

On suppose désormais $P(A) \neq 0$.

Alors :

$$P(A \cap B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap B) \times P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \frac{P(A \cap B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P(\bar{A} \cap B) \times P(A \cap \bar{B})}{P(A)}$$

Soit : $P_A(B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P_A(\bar{B}) \times P(\bar{A} \cap B)$.

Mais $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$. D'où :

$$P_A(B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1 - P_A(B)) \times P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A} \cap B) - P_A(B) \times P(\bar{A} \cap B)$$

Alors :

$$\begin{aligned}P_A(B) \times [P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)] &= P(\bar{A} \cap B) \\ \Leftrightarrow P_A(B) \times P(\bar{A}) &= P(\bar{A} \cap B) \Leftrightarrow P_A(B) \times (1 - P(A)) = P(\bar{A} \cap B) \\ \Leftrightarrow P_A(B) - P_A(B) \times P(A) &= P(\bar{A} \cap B) \Leftrightarrow P_A(B) - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \times P(A) = P(\bar{A} \cap B) \\ \Leftrightarrow P_A(B) - P(A \cap B) &= P(\bar{A} \cap B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)\end{aligned}$$

Comme $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$, on a bien l'indépendance des événements A et B .

On pouvait également s'affranchir des probabilités conditionnelles et mener des manipulations directes :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\bar{A} \cap B) \times P(A \cap \bar{B}) \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= [P(B) - P(A \cap B)] \times P(A \cap \bar{B}) \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(B) \times P(A \cap \bar{B}) - P(A \cap B) \times P(A \cap \bar{B}) \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) \times [P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(A \cap \bar{B})] &= P(B) \times P(A \cap \bar{B}) \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) \times P(\bar{B}) &= P(B) \times P(A \cap \bar{B}) \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) \times [1 - P(B)] &= P(B) \times P(A \cap \bar{B}) \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) - P(A \cap B) \times P(B) &= P(B) \times P(A \cap \bar{B}) \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times [P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})] \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) &= P(B) \times P(A) \end{aligned}$$

On retrouve l'indépendance des événements A et B .

Résultat final

Dans un espace probabilisé (Ω, P) , on a :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow P(A \cap B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap B) \times P(A \cap \bar{B})$$