

Soit (Ω, P) un univers probabilisé.

Soit A et B deux événements de Ω tels que $P(A) = P(B) = \frac{3}{4}$.

1. Calculer la valeur maximale et la valeur minimale de $P(A \cap B)$.
2. Généraliser.

Analyse

Classiquement, on prend en compte l'événement $A \cup B$ en exploitant l'égalité $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Résolution

Question 1.

A partir de l'égalité classique $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, il vient :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Avec $P(A) = P(B) = \frac{3}{4}$, il vient :

$$P(A \cap B) = \frac{3}{2} - P(A \cup B).$$

Pour déterminer la valeur maximale de $P(A \cap B)$, on va donc déterminer la valeur minimale de $P(A \cup B)$.

Comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, on a classiquement : $P(A) \leq P(A \cup B)$ et $P(B) \leq P(A \cup B)$ et donc : $\max(P(A), P(B)) \leq P(A \cup B)$.

Comme on a ici $P(A) = P(B)$, il vient simplement : $P(A) = P(B) \leq P(A \cup B)$.

On peut avoir l'égalité quand, par exemple, $A = A \cup B$, soit, par exemple, quand $A = B$.

La valeur minimale de $P(A \cup B)$ vaut donc $\frac{3}{4}$ et on en déduit la valeur maximale de

$$P(A \cap B) : \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Pour déterminer la valeur minimale de $P(A \cap B)$, on va maintenant déterminer la valeur maximale de $P(A \cup B)$.

Comme $P(A) + P(B) > 1$, on peut avoir $P(A \cup B) = 1$. On en déduit la valeur minimale de

$$P(A \cap B) : \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Pour $P(A) = P(B) = \frac{3}{4}$, on a :

$$\frac{1}{2} \leq P(A \cap B) \leq \frac{3}{4}.$$

Question 2.

Dans cette question, nous supposons $P(A) = P(B) = x$ avec $x \in [0; 1]$.

L'égalité $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ se réécrit cette fois :

$$P(A \cap B) = 2x - P(A \cup B)$$

En raisonnant comme précédemment, on montre facilement que la valeur maximale de $P(A \cap B)$ est x .

Pour ce qui est de la valeur minimale de $P(A \cap B)$, on va distinguer deux situations :

- $x > \frac{1}{2}$. Dans ce cas, on peut avoir, comme dans la question 1, $P(A \cup B) = 1$ et la valeur minimale de $P(A \cap B)$ vaut $2x - 1$.
- $x \leq \frac{1}{2}$. Dans ce cas, on peut avoir $A \cap B = \emptyset$ et donc $P(A \cap B) = 0$.

Finalement :

Pour $P(A) = P(B) = x$, on a :

$$0 \leq P(A \cap B) \leq x \text{ si } x \leq \frac{1}{2}$$

$$2x - 1 \leq P(A \cap B) \leq x \text{ si } x > \frac{1}{2}$$