Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un univers probabilisé.

1. Soit A et B deux événements quelconques dans $\mathcal{A}$.
   Montrer que : $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.
2. Généralisation (inégalité de BONFERRONI).
   Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $(A_1, A_2, A_3, ..., A_n) \in \mathcal{A}^n$.
   Montrer que : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$.

Analyse

Le premier résultat découle immédiatement d'une propriété classique des probabilités. Quant à la généralisation, une récurrence rapide permet de l'établir sans mal.

Résolution

Question 1.

A partir de l'égalité classique $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, il vient :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Comme $0 \leq P(A \cup B) \leq 1$, on a $-1 \leq -P(A \cup B) \leq 0$ et donc :
$P(A) + P(B) - 1 \leq P(A) + P(B) - P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.
Finalement, on a bien : $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

$$\boxed{\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2, P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1}$$

Question 2.

L'énoncé suggère une démonstration par récurrence…

Le résultat a été établi pour $n = 2$ à la question précédente.

Soit alors n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Supposons que l'on ait, pour tout $(A_1, A_2, A_3, ..., A_n)$ dans $\mathcal{A}^n$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$$

Soit alors $(A_1, A_2, A_3, ..., A_n, A_{n+1})$ dans $\mathcal{A}^{n+1}$.
On a :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &\underset{\text{question 1}}{\geq} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - 1 \\ &\underset{\substack{\text{hypothèse de} \\ \text{récurrence}}}{\geq} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1) + P(A_{n+1}) - 1 + \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - ((n+1)-1) \end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi au rang $n+1$.

Le résultat est donc vrai pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)}$$