Résoudre l’équation différentielle :

$$\left(2+x\right)y'=2-y$$

Analyse

On peut facilement obtenir une solution particulière. Pour ce qui est de l’équation sans second membre, on peut identifier la dérivée d’une produit.

Résolution

En cherchant une fonction constante y_p comme solution particulière, on obtient immédiatement $y_p=2$. On note que cette solution est définie sur $\mathbb{R}$.

Il convient donc ici de chercher les solutions de l’équation sans second membre : $\left(2+x\right)y'+y=0$.

On peut procéder « classiquement » (cf. le cours) ou remarquer que la dérivée de la fonction $x\mapsto x+2$ est la fonction constante $x\mapsto 1$. Ainsi, la somme $\left(2+x\right)y'+y$ correspond à la dérivée de la fonction $\varphi : x\mapsto \left(2+x\right)y\left(x\right)$.

On a donc : $\left(2+x\right)y'+y=0 \Leftrightarrow \varphi'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \varphi\left(x\right)=C$ où C est une constante réelle.
Ainsi, sur $\left]-\infty\,;-2\right[$ ou $\left]-2\,;+\infty\right[$, une solution générale y_E de l’équation sans second membre est de la forme : $y_E\left(x\right)=\dfrac{C}{2+x}$.

Ainsi, la solution générale de l’équation $\left(2+x\right)y'+y=2$ est de la forme $y_G\left(x\right)=2+\dfrac{C}{2+x}$.
Comme pour $C\neq 0$, on a une limite infinie quand x tend vers -2, on ne peut dans ce cas étudier une solution de cette forme définie sur $\mathbb{R}$. La seule solution définie sur $\mathbb{R}$ est la fonction constante prenant la valeur 2.

Résultat final

L'équation $(2+x)y'+y=2$ admet

- La fonction constante $x \mapsto 2$ comme unique solution définie sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions de la forme $x \mapsto 2+\dfrac{C}{2+x}$ avec $C \in \mathbb{R}^*$. Ces fonctions sont solutions sur $]-\infty\,;-2[$ ou $]-2\,;+\infty[$.