Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x + 8y + e^{t} \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$$

## Analyse

Nous avons affaire à un système différentiel dont les équations sont à coefficients constants. Après récriture sous la forme matricielle $X' = AX + B$, on a sans peine les valeurs propres de $A$ puis la solution générale du système homogène. Une variation des constantes permet alors de résoudre complètement le système.

## Résolution

On note : $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$.

L'écriture matricielle du système est alors :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$$

### *Résolution de l'équation homogène*

Le polynôme caractéristique de la matrice $A$ s'écrit :

$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} 1-X & 8 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 16 = (1-X-4)(1-X+4) = (-X-3)(-X+5)$$

$A$, matrice carrée d'ordre 2, admet deux valeurs propres distinctes, $-3$ et 5, elle est donc diagonalisable.

Nous allons déterminer, pour chaque valeur propre, un vecteur propre associé.

Pour $-3$.

On a : $AX=-3X \Leftrightarrow \begin{cases} x+8y=-3x \\ 2x+y=-3y \end{cases} \Leftrightarrow x+2y=0$.

Le vecteur $\vec{u}_{-3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre associé à la valeur propre $-3$.

Pour 5.

On a : $AX=5X \Leftrightarrow \begin{cases} x+8y=5x \\ 2x+y=5y \end{cases} \Leftrightarrow x-2y=0$.

Le vecteur $\vec{u}_{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre associé à la valeur propre 5.

Ainsi, la solution générale du système homogène s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5t} = \begin{pmatrix} 2\alpha e^{-3t} + 2\beta e^{5t} \\ -\alpha e^{-3t} + \beta e^{5t} \end{pmatrix}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux constantes réelles quelconques.

### *Recherche d'une solution particulière*

Notons $\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$ une telle solution. On la cherche sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \alpha(t)\begin{pmatrix} 2e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix} + \beta(t)\begin{pmatrix} 2e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha(t)e^{-3t} + 2\beta(t)e^{5t} \\ -\alpha(t)e^{-3t} + \beta(t)e^{5t} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$ est solution du système différentiel si, et seulement si :

$$\alpha'(t)\begin{pmatrix} 2e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix} + \beta'(t)\begin{pmatrix} 2e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha'(t)e^{-3t} + 2\beta'(t)e^{5t} \\ -\alpha'(t)e^{-3t} + \beta'(t)e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} 2\alpha'(t)e^{-3t} + 2\beta'(t)e^{5t} = e^{t} \\ -\alpha'(t)e^{-3t} + \beta'(t)e^{5t} = e^{-3t} \end{cases} \qquad \text{(S')}$$

Par combinaison linéaire, on obtient facilement :

$$\begin{cases} \alpha'(t)e^{-3t} = \dfrac{1}{4}\left(e^{t} - 2e^{-3t}\right) \\ \beta'(t)e^{5t} = \dfrac{1}{4}\left(e^{t} + 2e^{-3t}\right) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \dfrac{1}{4}\left(e^{4t} - 2\right) \\ \beta'(t) = \dfrac{1}{4}\left(e^{-4t} + 2e^{-8t}\right) \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} \alpha(t) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}e^{4t} - 2t\right) = \dfrac{1}{16}e^{4t} - \dfrac{1}{2}t \\ \beta(t) = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{4}e^{-4t} - \dfrac{1}{4}e^{-8t}\right) = -\dfrac{1}{16}e^{-4t} - \dfrac{1}{16}e^{-8t} \end{cases}$$

Puis :

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\left(\dfrac{1}{16}e^{4t} - \dfrac{1}{2}t\right)e^{-3t} + 2\left(-\dfrac{1}{16}e^{-4t} - \dfrac{1}{16}e^{-8t}\right)e^{5t} \\ -\left(\dfrac{1}{16}e^{4t} - \dfrac{1}{2}t\right)e^{-3t} + \left(-\dfrac{1}{16}e^{-4t} - \dfrac{1}{16}e^{-8t}\right)e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(t + \dfrac{1}{8}\right)e^{-3t} \\ -\dfrac{1}{8}e^{t} + \left(\dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{16}\right)e^{-3t} \end{pmatrix}$$

### *Solution générale*

Finalement, la solution générale du système différentiel s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha e^{-3t} + 2\beta e^{5t} \\ -\alpha e^{-3t} + \beta e^{5t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\left(t + \dfrac{1}{8}\right)e^{-3t} \\ -\dfrac{1}{8}e^{t} + \left(\dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{16}\right)e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha e^{-3t} + 2\beta e^{5t} - \left(t + \dfrac{1}{8}\right)e^{-3t} \\ -\alpha e^{-3t} + \beta e^{5t} - \dfrac{1}{8}e^{t} + \left(\dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{16}\right)e^{-3t} \end{pmatrix}$$

## Résultat final

La solution générale du système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x + 8y + e^{t} \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$$

S'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha e^{-3t} + 2\beta e^{5t} - \left(t + \frac{1}{8}\right) e^{-3t} \\ -\alpha e^{-3t} + \beta e^{5t} - \frac{1}{8} e^{t} + \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{16}\right) e^{-3t} \end{pmatrix}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux constantes réelles quelconques.