

Résoudre l'équation différentielle :

$$3xy' - 4y = x$$

Analyse

Nous avons affaire à une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants et second membre non nul. On résout classiquement l'équation homogène associée puis on détermine une solution particulière grâce, par exemple, à la méthode de variation de la constante. On se pose alors un problème classique de raccordement de solutions.

Résolution

Résolution de l'équation sans second membre (équation homogène).

On doit résoudre $3xy' - 4y = 0$.

Pour x différent de 0, c'est-à-dire sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* , on a : $3xy' - 4y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{4}{3x}y = 0$.

En posant : $a : x \mapsto -\frac{4}{3x}$, on sait que les solutions de l'équation $y' - \frac{4}{3x}y = 0$ sont de la forme

$x \mapsto K e^{-A(x)}$ où A désigne une primitive de a sur l'intervalle considéré (ici tout intervalle inclus dans \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*) et K une constante réelle quelconque. On a facilement ici

$A : x \mapsto -\frac{4}{3} \ln x$ par exemple et donc :

$$y = K e^{-A(x)} = K e^{-\left(-\frac{4}{3} \ln x\right)} = K e^{\frac{4}{3} \ln x} = K x^{\frac{4}{3}}$$

Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto K x^{\frac{4}{3}}, \text{ où } K \text{ est une constante réelle quelconque.}$$

Recherche d'une solution particulière

On peut utiliser la méthode de variation de la constante en cherchant une solution particulière y_p sous la forme $y_p(x) = K(x)x^{\frac{4}{3}}$ où K est dérivable sur l'intervalle considéré.

Il vient alors : $y_p'(x) = K'(x)x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}K(x)x^{\frac{4}{3}-1} = K'(x)x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}K(x)x^{\frac{1}{3}}$.

D'où, pour tout intervalle I inclus dans \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* :

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } & 3xy' - 4y = x \\ \forall x \in I, & 3x y_p'(x) - 4y_p(x) = x \\ \Leftrightarrow \forall x \in I, & 3x \left(K'(x)x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}K(x)x^{\frac{1}{3}} \right) - 4K(x)x^{\frac{4}{3}} = x \\ \Leftrightarrow \forall x \in I, & \cancel{3xK'(x)x^{\frac{4}{3}} + 4xK(x)x^{\frac{1}{3}}} - 4K(x)x^{\frac{4}{3}} = x \\ \Leftrightarrow x \in I, & 3xK'(x)x^{\frac{4}{3}} = x \\ \Leftrightarrow x \in I, & K'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

On doit donc trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$.

On a facilement : $x \mapsto \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{4}{3}+1} x^{-\frac{4}{3}+1} = -x^{-\frac{1}{3}}$.

Il vient alors : $y_p(x) = K(x)x^{\frac{4}{3}} = -x^{-\frac{1}{3}} \times x^{\frac{4}{3}} = -x$.

La fonction $x \mapsto -x$ est solution particulière de l'équation différentielle $3xy' - 4y = x$.

Remarques :

❶ Cette fonction est définie sur \mathbb{R} et est solution de l'équation sur cet intervalle (pour tout x réel, on a $y_p'(x) = -1$ et pour $x = 0$, on a : $y_p(x) = y_p(0) = -0 = 0$). D'où :

$3 \times 0 \times (-1) - 4 \times 0 = 0$, l'équation est bien vérifiée en 0).

❷ On aurait pu rapidement trouver cette solution particulière en cherchant une solution polynomiale (démarche que justifie la nature des coefficients et celle du second membre). En notant n le degré et a_n le coefficient correspondant, on doit identifier $(3n-4)a_n x^n$ à x et il vient immédiatement $n=1$ et $a_n = a_1 = -1 \dots$

Recherche de solutions définies en 0

Nous cherchons ici des solutions définies sur un intervalle I contenant 0 (en particulier des solutions définies sur \mathbb{R}). A la question précédente, nous avons vu que la fonction $x \mapsto -x$ était solution de l'équation sur \mathbb{R} .

Nous en cherchons d'autres sous la forme :

$$y : x \mapsto \begin{cases} -x + K_- x^{\frac{4}{3}} & \text{si } x \leq 0 \\ -x + K_+ x^{\frac{4}{3}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

où K_- et K_+ sont deux constantes réelles à priori quelconques.

La fonction y est clairement continue en 0 ($\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0$).

Etudions sa dérivabilité.

Pour $x < 0$, on a : $\frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \frac{-x + K_- x^{\frac{4}{3}}}{x} = -1 + K_- x^{\frac{1}{3}}$.

Et pour $x > 0$, on a : $\frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \frac{-x + K_+ x^{\frac{4}{3}}}{x} = -1 + K_+ x^{\frac{1}{3}}$.

On en déduit immédiatement :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(-1 + K_- x^{\frac{1}{3}} \right) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(-1 + K_+ x^{\frac{1}{3}} \right) = -1$$

En d'autres termes, la fonction y est dérivable en 0 et on a : $y'(0) = -1$.

Il vient enfin : $3 \times 0 \times y'(0) - 4 \times y(0) = 3 \times 0 \times (-1) - 4 \times 0 = 0$. L'équation différentielle est bien vérifiée en 0.

On en déduit finalement que la fonction y est solution de l'équation différentielle sur tout intervalle I contenant 0, en particulier sur \mathbb{R} .

Résultat final

Les solutions définies en 0 (en particulier sur \mathbb{R}) de l'équation différentielle $3xy' - 4y = x$ sont de la forme :

$$y : x \mapsto \begin{cases} -x + K_- x^{\frac{4}{3}} & \text{si } x \leq 0 \\ -x + K_+ x^{\frac{4}{3}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

où K_- et K_+ sont deux constantes réelles quelconques.