

Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$$

Indication : on effectuera le changement de variable $x = \ln u$.

Analyse

Nous avons affaire à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants et second membre non nul. Le changement de variable proposé permet de se ramener à une équation différentielle nettement plus simple...

Résolution

On a : $x = \ln u \Leftrightarrow u = e^x$ puis : $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \times \frac{dy}{du} = e^x \times \frac{dy}{du} = u \times \frac{dy}{du}$ et

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{du}{dx} \times \frac{d}{du} \left(u \times \frac{dy}{du} \right) = u \times \left(\frac{dy}{du} + u \times \frac{d^2y}{du^2} \right) = u \times \frac{dy}{du} + u^2 \times \frac{d^2y}{du^2}.$$

Il vient alors, en tenant compte de $u \neq 0$:

$$\begin{aligned} y'' - y' - e^{2x}y &= e^{3x} \\ \Leftrightarrow u \times \frac{dy}{du} + u^2 \times \frac{d^2y}{du^2} - u \times \frac{dy}{du} - u^2 \times y &= u^3 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2y}{du^2} - y &= u \end{aligned}$$

Nous nous sommes ainsi ramenés à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants dont l'équation caractéristique s'écrit : $r^2 - 1 = 0$. Ses solutions étant -1 et 1 , les solutions de l'équation homogène $\frac{d^2y}{du^2} - y = 0$ sont les fonctions $u \mapsto \alpha e^u + \beta e^{-u}$ où α et β sont deux constantes réelles.

On note que la fonction $u \mapsto -u$ est solution de $\frac{d^2y}{du^2} - y = u$.

Les solutions de l'équation $\frac{d^2y}{du^2} - y = u$ sont donc les fonctions de la forme :

$$u \mapsto -u + \alpha e^u + \beta e^{-u} \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux constantes réelles.}$$

En revenant à la variable initiale, on conclut finalement que l'équation $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ admet pour solutions les fonctions :

$$x \mapsto -e^x + \alpha e^{e^x} + \beta e^{-e^x} \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux constantes réelles.}$$

Résultat final

Les solutions de l'équation $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ sont les fonctions :

$$x \mapsto -e^x + \alpha e^{e^x} + \beta e^{-e^x}$$

où α et β sont deux constantes réelles.