Soit ABC un triangle.
On note classiquement : $\text{AB}=c$, $\text{AC}=b$ et $\text{BC}=a$.

Montrer que l'on a :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<2$$

Analyse

Qui dit triangle dit, d'abord, pour ce qui est des inégalités, inégalité triangulaire. En l'appliquant pour chaque terme du membre de gauche de l'inégalité proposée, on obtient facilement : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<1+1+1=3$. L'inégalité proposée est ainsi une amélioration de cette première majoration.

Résolution

On peut supposer, sans faire perdre de la généralité à notre démarche, que l'on a renommé les sommets du triangle de telle sorte que l'on a :

$$0<a\leq b\leq c$$

On en tire alors immédiatement : $0<a+b\leq a+c\leq b+c$ puis : $0<\frac{1}{b+c}\leq\frac{1}{a+c}\leq\frac{1}{a+b}$.

On a :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{b+c}\leq\frac{1}{a+b}\Rightarrow\frac{a}{b+c}\leq\frac{a}{a+b}\\ \frac{1}{a+c}\leq\frac{1}{a+b}\Rightarrow\frac{b}{a+c}\leq\frac{b}{a+b}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}\leq\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1$$

On a alors : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\leq 1+\frac{c}{a+b}$.

D'après l'inégalité triangulaire, on a : $c<a+b$, d'où : $\frac{c}{a+b}<1$.

Finalement : $1+\frac{c}{a+b}<2$ et on a bien : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<2$.

Remarque : si on suppose que le triangle ABC est rectangle et que l'on note α l'un des angles aigus alors on a : $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

On a donc : $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}<2$.