

On considère, dans un repère orthonormé l'ensemble de droites :

$$\left\{ D_\lambda : (1-\lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer qu'il existe un point équidistant de toutes les droites  $D_\lambda$ .

## Analyse

On se donne un point  $M$  du plan et, le repère étant orthonormé, on écrit facilement la distance de ce point à une droite  $D_\lambda$  quelconque. Cette distance (ou, pour simplifier les calculs, son carré) s'exprime comme une fonction dérivable de  $\lambda$ . Elle est constante si on peut choisir les coordonnées du point de telle sorte que sa dérivée soit nulle ...

## Résolution

Soit  $M(x_0; y_0)$  un point donné du plan.

Le repère considéré étant orthonormé, la distance  $d(M, D_\lambda)$  du point  $M$  à la droite  $D_\lambda$  s'écrit :

$$d(M, D_\lambda) = \frac{|(1-\lambda^2)x_0 + 2\lambda y_0 - (4\lambda + 2)|}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\lambda)^2}}$$

En tenant compte de  $(1-\lambda^2)^2 + (2\lambda)^2 = 1 - 2\lambda^2 + \lambda^4 + 4\lambda^2 = 1 + 2\lambda^2 + \lambda^4 = (1 + \lambda^2)^2$ , il vient :

$$d(M, D_\lambda) = \frac{|(1-\lambda^2)x_0 + 2\lambda y_0 - (4\lambda + 2)|}{\sqrt{(1+\lambda^2)^2}} = \frac{|(1-\lambda^2)x_0 + 2\lambda y_0 - (4\lambda + 2)|}{1 + \lambda^2}$$

Puis :

$$d^2(M, D_\lambda) = \frac{\left[ (1-\lambda^2)x_0 + 2\lambda y_0 - (4\lambda + 2) \right]^2}{(1 + \lambda^2)^2} = \left[ \frac{(1-\lambda^2)x_0 + 2\lambda y_0 - (4\lambda + 2)}{1 + \lambda^2} \right]^2$$

$$\text{Posons alors : } \varphi(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)x_0 + 2\lambda y_0 - (4\lambda + 2)}{1 + \lambda^2} = \frac{-x_0\lambda^2 + (2y_0 - 4)\lambda + (x_0 - 2)}{1 + \lambda^2}.$$

ATTENTION ! Ne pas procéder ici à des simplifications abusives : on a  $d(M, D_\lambda) = |\varphi(\lambda)|$ .

On a :

$$\begin{aligned} & \forall \lambda \in \mathbb{R}, d(M, D_\lambda) \text{ constante} \\ \Leftrightarrow & \forall \lambda \in \mathbb{R}, d^2(M, D_\lambda) \text{ constante} \\ \Leftrightarrow & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi^2(\lambda) \text{ constante} \\ \Leftrightarrow & \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\varphi^2)'(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Or :  $(\varphi^2)' = 2\varphi'\varphi$ . Ainsi, on a :  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\varphi^2)'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, 2\varphi'(\lambda)\varphi(\lambda) = 0$ .

Peut-on avoir  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda) = 0$  ?

Notons qu'on cherche ainsi si les droites  $D_\lambda$  sont concourantes. Cette recherche n'est pas à proprement parler obligatoire puisque cette situation serait fournie par  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi'(\lambda) = 0$ .

On a :

$$\begin{aligned} & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall \lambda \in \mathbb{R}, -x_0\lambda^2 + (2y_0 - 4)\lambda + (x_0 - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -x_0 = 0 \\ 2y_0 - 4 = 0 \\ x_0 - 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La première et la troisième équation sont incompatibles et on conclut immédiatement que les droites  $D_\lambda$  ne sont pas concourantes.

On a maintenant :

$$\begin{aligned} & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi'(\lambda) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \frac{[-2x_0\lambda + (2y_0 - 4)](1 + \lambda^2) - [-x_0\lambda^2 + (2y_0 - 4)\lambda + (x_0 - 2)] \times 2\lambda}{(1 + \lambda^2)^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \cancel{-2x_0\lambda^3} + (2y_0 - 4)\lambda^2 - 2x_0\lambda + (2y_0 - 4) + \cancel{2x_0\lambda^3} - 2(2y_0 - 4)\lambda^2 - 2\lambda(x_0 - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall \lambda \in \mathbb{R}, -2(y_0 - 2)\lambda^2 - 4\lambda(x_0 - 1) + 2(y_0 - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -2(y_0 - 2) = 0 \\ -4(x_0 - 1) = 0 \\ 2(y_0 - 2) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y_0 - 2 = 0 \\ x_0 - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu le point  $\Omega(1; 2)$  et il vient :

$$d(\Omega, D_\lambda) = \frac{|(1-\lambda^2) \times 1 + 2\lambda \times 2 - (4\lambda + 2)|}{1+\lambda^2} = \frac{|1-\lambda^2 + 4\lambda - 4\lambda - 2|}{1+\lambda^2} = \frac{|-1-\lambda^2|}{1+\lambda^2} = 1$$

## Résultat final

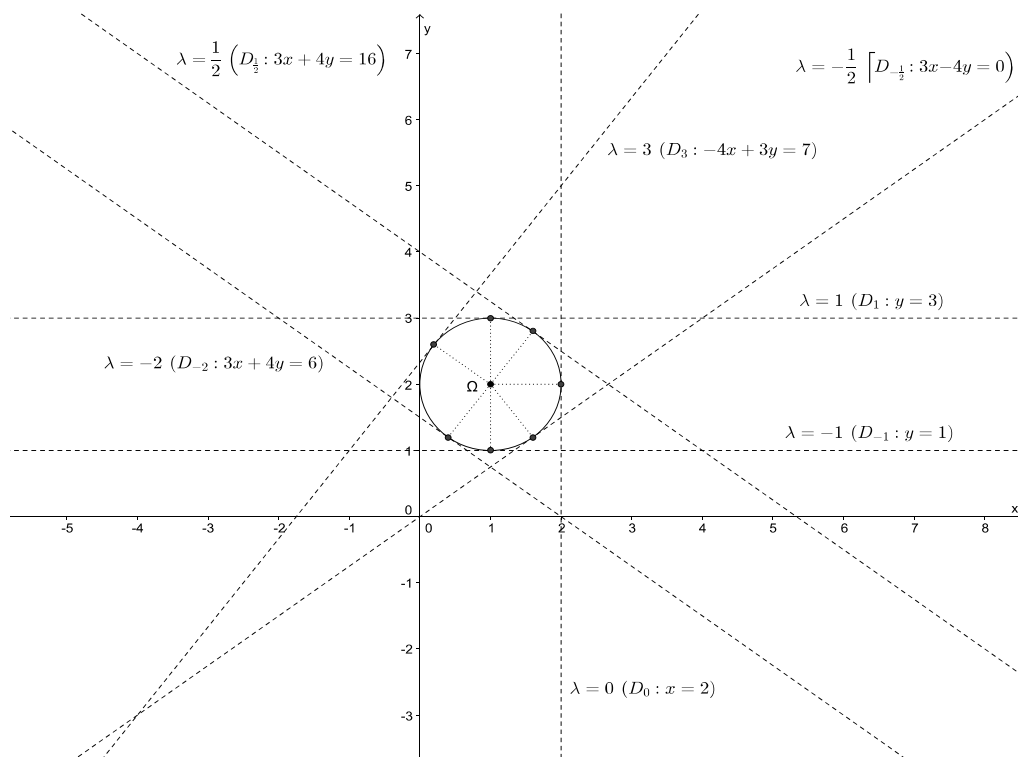
Dans un repère orthonormé, le point  $\Omega(1; 2)$  est équidistant des droites  $D_\lambda$  d'équation :

$$(1-\lambda^2)x + 2\lambda y - (4\lambda + 2) = 0$$

## Complément

Puisque le point  $\Omega(1; 2)$  est équidistant des droites  $D_\lambda$  et que la distance commune vaut 1, on en déduit que les projetés orthogonaux de  $\Omega$  sur les droites  $D_\lambda$  appartiennent à un même cercle : il s'agit du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega$  et de rayon 1.

On a représenté ci-dessous le cercle  $\mathcal{C}$  et les droites  $D_\lambda$  pour  $\lambda \in \left\{-2; -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; 3\right\}$ .



Les droites  $D_\lambda$  sont toutes tangentes au cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega$  et de rayon 1. On peut alors légitimement se demander si, par un point donné du cercle  $\mathcal{C}$ , il passe une droite  $D_\lambda$ .

Pour  $\lambda$  réel donné, des calculs classiques nous permettent d'écrire les coordonnées  $(x; y)$  du projeté orthogonal du point  $\Omega$  sur la droite  $D_\lambda$ . On obtient, en faisant apparaître les coordonnées du point  $\Omega$  :

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \\ y = 2 + \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \end{cases}$$

Si on pose  $\lambda = \tan \frac{\theta}{2}$  avec  $\theta \in ]-\pi; \pi[$ , c'est-à-dire  $\theta = 2 \arctan \lambda$  (le changement de variable est bijectif), il vient :

$$\begin{cases} x = 1 + \cos \theta \\ y = 2 + \sin \theta \end{cases}$$

Lorsque  $\theta$  varie dans l'intervalle  $]-\pi; \pi[$ , on obtient tous les points du cercle  $\mathcal{C}$  sauf le point correspondant à  $\theta = \pi$  (ou  $-\pi$ ) c'est-à-dire le points de coordonnées  $(0; 2)$ .

En définitive, par tout point du cercle  $\mathcal{C}$ , hormis le point de coordonnées  $(0; 2)$ , il passe une droite  $D_\lambda$  et une seule.