Soit $(G,\bullet)$ un groupe multiplicatif d'élément neutre e.
Soit a, b et c trois éléments de G tels que : $a^3 = b^2$, $b^3 = c^2$ et $a^2 = c^3$.

1. Montrer que l'on a : $a^{19} = e$, $b = a^{-8}$ et $c = a^7$.

2. On suppose maintenant que G est le groupe engendré par $\{a, b, c\}$.
   Montrer que G est cyclique et que l'on a : $\forall x \in G, x^{19} = e$.

Analyse

Dans la première question, il convient de prendre garde de ne pas … tourner en rond ! Dans la deuxième question, on revient à la définition de la cyclicité et l'égalité $a^{19} = e$ sur le générateur *a* permet de conclure.

Résolution

Question 1.

Les trois égalités données vont nous permettre de déterminer une nouvelle égalité entre deux « puissances » de l'élément *a* :

$$a^{27} = \left(a^3\right)^9 = \left(b^2\right)^9 = \left(b^3\right)^6 = \left(c^2\right)^6 = \left(c^3\right)^4 = \left(a^2\right)^4 = a^8$$

L'égalité : $a^{27} = a^8$ donne alors : $a^{19} = a^{27}.a^{-8} = a^8.a^{-8} = e$.

$$\boxed{a^{19} = e}$$

Considérons maintenant l'élément b^9.
On a d'une part :

$$b^9 = b.b^8 = b.\left(b^2\right)^4 = b.\left(a^3\right)^4 = b.a^{12}$$

On a, par ailleurs :

$$b^9 = \left(b^3\right)^3 = \left(c^2\right)^3 = \left(c^3\right)^2 = \left(a^2\right)^2 = a^4$$

De ce qui précède, on tire l'égalité : $b.a^{12} = a^4$, soit en multipliant chaque membre de l'égalité par : a^{-12} : $b = \left(b.a^{12}\right).a^{-12} = a^4.a^{-12} = a^{-8}$.

$$\boxed{b = a^{-8}}$$

On a enfin :

$$c^3 = a^2$$
$$\Leftrightarrow c.c^2 = a^2 \Leftrightarrow c.b^3 = a^2$$
$$\Leftrightarrow c.\left(a^{-8}\right)^3 = a^2 \Leftrightarrow c.a^{-24} = a^2$$
$$\Leftrightarrow c = a^{26} \Leftrightarrow c = a^{19}.a^7$$
$$\Leftrightarrow c = a^7$$

$$\boxed{c = a^7}$$

Question 2.

On suppose ici que le groupe *G* est engendré par $\{a, b, c\}$.

Comme $b = a^{-8} = a^{-8}.a^{19} = a^{11}$ et $c = a^7$, le groupe *G* est en fait *monogène* puisqu'engendré par le seul élément *a*. (ceci dit *G* est également engendré par *b* et par *c*).

Par ailleurs, comme $a^{19} = e$, le groupe *G* est *fini*.

En définitive :

Le groupe G est cyclique.

Soit maintenant *x* un élément de *G*.

Puisque *G* est engendré par *a*, *x* est de la forme : $x = a^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
Il vient alors :

$$x^{19} = \left(a^n\right)^{19} = \left(a^{19}\right)^n = e^n = e$$

$$\boxed{\forall x \in G, x^{19} = e}$$