Soit $(G,\bullet)$ un groupe multiplicatif d'élément neutre e.
Soit H et K deux sous-groupes de G.

On suppose que $H\cup K$ est un sous-groupe de G.

Montrer qu'on a alors $H\subset K$ ou $K\subset H$.

Analyse

Dans cet exercice, classique, on raisonne par l'absurde en n'oubliant pas que l'intersection de deux sous-groupes d'un groupe donné et encore un sous-groupe de ce groupe (ce qui n'est généralement pas vrai pour l'union …).

Résolution

Nous menons un raisonnement par l'absurde en supposant : $H\not\subset K$ et $K\not\subset H$.

On suppose donc qu'il existe un élément a de H qui n'appartient pas à K ($a\in H\setminus K$) et un élément b de K qui n'appartient pas à H ($b\in K\setminus H$).

Intéressons-nous alors à l'élément ab qui est un élément du sous-groupe $H\cup K$.

Supposons $ab\in H$. Alors $a^{-1}(ab)=b$ est un élément de H, ce qui est absurde d'après l'hypothèse faite sur b.

Si maintenant nous supposons $ab\in K$, alors $(ab)b^{-1}=a$ est un élément de K, ce qui est encore absurde d'après l'hypothèse faite sur a.

En définitive : $ab\notin H\cup K$ et on aboutit ainsi à une contradiction.

On en conclut que l'on ne peut faire l'hypothèse « $H\not\subset K$ et $K\not\subset H$ » et donc que l'on a : $H\subset K$ ou $K\subset H$.

Le résultat est ainsi établi.