

Soit (G, \times) un groupe multiplicatif d'élément neutre e et E un ensemble.

Soit Φ une bijection de G dans E .

On définit sur E la loi $*$ par :

$$\forall (x, y) \in E^2, x * y = \Phi(\Phi^{-1}(x) \times \Phi^{-1}(y))$$

Montrer que $(E, *)$ est un groupe isomorphe à (G, \times) .

Analyse

Un exercice très classique où une bijection permet facilement de munir un ensemble (l'ensemble d'arrivée) d'une structure de groupe à partir de la structure de groupe de l'ensemble de départ. On vérifie « tranquillement » que les axiomes de la structure sont satisfaits.

Résolution

Préambule : afin d'alléger l'écriture nous notons classiquement, pour tout couple (x, y) de G : xy au lieu de $x \times y$.

Par définition de Φ , la loi $*$ est bien une loi de composition interne définie sur E .

Pour tout (x, y, z) dans E^3 , on a :

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= [\Phi(\Phi^{-1}(x)\Phi^{-1}(y))] * z \\ &= \Phi(\Phi^{-1}[\Phi(\Phi^{-1}(x)\Phi^{-1}(y))]\Phi^{-1}(z)) \\ &= \Phi[(\Phi^{-1}(x)\Phi^{-1}(y))\Phi^{-1}(z)] \\ &= \Phi[\Phi^{-1}(x)(\Phi^{-1}(y)\Phi^{-1}(z))] \quad (\text{associativité de } \bullet \text{ sur } G) \\ &= \Phi(\Phi^{-1}(x)\Phi^{-1}[\Phi(\Phi^{-1}(y)\Phi^{-1}(z))]) \\ &= x * [\Phi(\Phi^{-1}(y)\Phi^{-1}(z))] \\ &= x * (y * z)\end{aligned}$$

La loi $*$ est associative.

Montrons que $\Phi(e)$ est neutre pour $*$.

Pour tout x de E , on a :

$$\begin{aligned}x * \Phi(e) &= \Phi \left[\Phi^{-1}(x) \Phi^{-1}(\Phi(e)) \right] \\&= \Phi \left[\Phi^{-1}(x) (\Phi^{-1} \circ \Phi)(e) \right] \\&= \Phi \left[\Phi^{-1}(x) e \right] \\&= \Phi \left[\Phi^{-1}(x) \right] \quad (e \text{ est neutre dans } G) \\&= (\Phi \circ \Phi^{-1})(x) \\&= x\end{aligned}$$

De façon similaire, on montre que l'on a : $\forall x \in E, \Phi(e) * x = x$.

$\Phi(e) = e'$ est neutre pour $*$.

L'application Φ étant bijective, tout élément x de E admet un antécédent $\Phi^{-1}(x)$ dans G . G étant un groupe, $\Phi^{-1}(x)$ admet un symétrique $(\Phi^{-1}(x))^{-1}$. On va alors s'intéresser à son image par Φ : $\Phi \left[(\Phi^{-1}(x))^{-1} \right]$.

Pour tout x de E , on a :

$$\begin{aligned}x * \Phi \left[(\Phi^{-1}(x))^{-1} \right] &= \Phi \left[\Phi^{-1}(x) \Phi^{-1} \left(\Phi \left[(\Phi^{-1}(x))^{-1} \right] \right) \right] \\&= \Phi \left[\Phi^{-1}(x) (\Phi^{-1} \circ \Phi) \left[(\Phi^{-1}(x))^{-1} \right] \right] \\&= \Phi \left[\Phi^{-1}(x) (\Phi^{-1}(x))^{-1} \right] \\&= \Phi(e) \\&= e'\end{aligned}$$

De façon similaire, on montre que l'on a : $\forall x \in E, \Phi \left[(\Phi^{-1}(x))^{-1} \right] * x = e'$.

En définitive : tout élément x de E admet un inverse pour $*$: $\Phi \left[(\Phi^{-1}(x))^{-1} \right]$.

La loi $*$ est associative et admet un élément neutre. De plus, tout élément de E admet un inverse pour $*$. On en conclut que $(E, *)$ est un groupe.

L'application Φ est-elle un morphisme de groupe ?

Pour tout couple (x, y) de G^2 , on a :

$$\begin{aligned}\Phi(x) * \Phi(y) &= \Phi \left[\Phi^{-1}(\Phi(x)) \Phi^{-1}(\Phi(y)) \right] \\ &= \Phi \left[(\Phi^{-1} \circ \Phi)(x) (\Phi^{-1} \circ \Phi)(y) \right] \\ &= \Phi(xy)\end{aligned}$$

L'application Φ est bien un morphisme de groupe. Comme elle est bijective, il s'agit d'un isomorphisme.

En définitive, les groupes (G, \times) et $(E, *)$ sont isomorphes.

Résultat final

Si (G, \times) est un groupe, E un ensemble et Φ une bijection de G dans E ,

alors on peut munir E d'une structure de groupe
via la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall (x, y) \in E^2, x * y = \Phi \left[\Phi^{-1}(x) \times \Phi^{-1}(y) \right]$$

L'application Φ définit alors un isomorphisme de (G, \times) dans $(E, *)$.

Remarque : on dit que l'application Φ réalise un « transport » de la structure de groupe de G dans E .