

Sur  $\mathbb{R}$ , on définit la loi  $*$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x * y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$$

1. Vérifier que l'on a :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{1+(x*y)^2} = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy$ .
2. Montrer que  $(\mathbb{R}, *)$  est un groupe.
3. Montrer que la fonction sinus hyperbolique est un isomorphisme de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $(\mathbb{R}, *)$ .

---

## Analyse

Une fonction classique (le sinus hyperbolique) permet de définir une autre structure de groupe sur  $\mathbb{R}$  via la loi  $*$  dont on vérifie aisément qu'elle satisfait les axiomes de la structure de groupe.

---

## Résolution

### Question 1.

Notons, dans un premier temps que l'on a, pour tout couple  $(x, y)$  dans  $\mathbb{R}^2$  :  $1+(x*y)^2 \geq 1$ .

Ainsi,  $\sqrt{1+(x*y)^2}$  existe et est strictement positif.

On a :  $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} \geq 1$ .

Par ailleurs, si  $x$  et  $y$  sont de même signe, on a  $xy \geq 0$  et donc  $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy \geq 1 > 0$ .

Si  $x$  et  $y$  sont de signes contraires, on a :  $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} - |xy|$ .

Il vient alors :  $(\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2})^2 - |xy|^2 = (1+x^2)(1+y^2) - x^2y^2 = 1+x^2+y^2 \geq 1 > 0$ .

Donc :  $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} - |xy| > 0$ , d'où  $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy > 0$ .

D'après ce qui précède, pour comparer  $\sqrt{1+(x*y)^2}$  et  $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy$ , on peut comparer leurs carrés.

On a :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+(x*y)^2}^2 &= 1+(x*y)^2 \\ &= 1+(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2})^2 \\ &= 1+x^2(1+y^2) + y^2(1+x^2) + 2xy\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+x^2} \\ &= (1+x^2+y^2+x^2y^2) + 2xy\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+x^2} + x^2y^2 \\ &= (1+x^2)(1+y^2) + 2xy\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+x^2} + x^2y^2 \\ &= (\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+x^2} + xy)^2\end{aligned}$$

Les nombres  $\sqrt{1+(x*y)^2}$  et  $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy$  sont tous deux strictement positifs et de même carré. Ils sont donc égaux.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{1+(x*y)^2} = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy$$

### Question 2.

La loi  $*$  est clairement une loi de composition interne sur  $\mathbb{R}$  !

Notons, à titre de remarque, que la symétrie de l'expression  $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$  permet d'affirmer que la loi  $*$  est commutative.

Etudions maintenant l'associativité de  $*$ .

Pour tout  $(x, y, z)$  dans  $\mathbb{R}^3$ , on a :

$$(x*y)*z = (x*y)\sqrt{1+z^2} + z\sqrt{1+(x*y)^2}$$

En utilisant le résultat de la question précédente, il vient alors :

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= (x*y)\sqrt{1+z^2} + z\sqrt{1+(x*y)^2} \\ &= (x*y)\sqrt{1+z^2} + z(\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy) \\ &= (x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+z^2} + z(\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy) \\ &= x\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+z^2} + y\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+z^2} + z\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xyz\end{aligned}$$

De façon similaire, on montre que l'on a :

$$x*(y*z) = x\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+z^2} + y\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+z^2} + z\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xyz$$

Finalement :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x * y) * z = x * (y * z)$ . La loi  $*$  est associative.

On a immédiatement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x * 0 = x\sqrt{1+0^2} + 0 \times \sqrt{1+x^2} = x$$

La commutativité de  $*$  nous donne alors :  $\forall x \in \mathbb{R}, 0 * x = x$ .

En définitive :  $\forall x \in \mathbb{R}, x * 0 = x * 0 = x$ .

0 est l'élément neutre de  $*$ .

Enfin, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x * (-x) = x\sqrt{1+(-x)^2} + (-x) \times \sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+x^2} = 0$$

La commutativité de  $*$  nous donne alors :  $\forall x \in \mathbb{R}, (-x) * x = 0$ .

En définitive :  $\forall x \in \mathbb{R}, x * (-x) = (-x) * x = 0$ .

Tout élément de  $\mathbb{R}$  admet ainsi  $-x$  comme symétrique pour la loi  $*$ .

De ce qui précède, on déduit que  $(\mathbb{R}, *)$  est un groupe (il est même abélien puisque la loi  $*$  est commutative).

$(\mathbb{R}, *)$  est un groupe abélien.

### Question 3.

On sait déjà que la fonction sinus hyperbolique est bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Montrons qu'il s'agit d'un morphisme de groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $(\mathbb{R}, *)$ .

Il convient donc de montrer :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sinh(x + y) = \sinh(x) * \sinh(y)$ .

Pour tout couple  $(x, y)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , on a, en utilisant la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique,  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$  :

$$\begin{aligned} \sinh(x) * \sinh(y) &= \sinh(x)\sqrt{1+\sinh^2(y)} + \sinh(y)\sqrt{1+\sinh^2(x)} \\ &= \sinh(x)\sqrt{\cosh^2(y)} + \sinh(y)\sqrt{\cosh^2(x)} \\ &= \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x) \\ &= \sinh(x + y) \end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi.

La fonction sinus hyperbolique est un isomorphisme de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $(\mathbb{R}, *)$ .