

Soit $(G, +)$ un groupe.

Soit H, K et L trois sous-groupes de G vérifiant :

$$H \subset K, H \cap L = K \cap L \text{ et } H + L = K + L$$

Démontrer que l'on a : $H = K$.

Analyse

Que de « contraintes » sur ces trois sous-groupes ! Pour montrer que l'on a $H = K$, on tient compte du fait que l'on a déjà une première inclusion entre ces deux sous-groupes ($H \subset K$).

Résolution

Comme on a $H \subset K$, on peut assez naturellement chercher à montrer $K \subset H$.

Soit donc x un élément quelconque de K .

Notons que l'on a $K \subset K + L = \{a + b / a \in K, b \in L\}$ puisque tout élément x de K s'écrit $x = x + e$ où e est l'élément neutre de G qui appartient également à H, K et L en tant que sous-groupes de G .

Comme $x \in K \subset K + L = H + L$, on peut écrire : $x = x_H + x_L$ avec $x_H \in H$ et $x_L \in L$.

Il vient donc : $x - x_H = x_L$.

Comme $H \subset K$, il vient $x_H \in K$ et donc : $\underbrace{x - x_H}_{\in K} = \underbrace{x_L}_{\in L} \in K \cap L = H \cap L$.

On en déduit : $x - x_H \in H$ et enfin : $x = (x - x_H) + x_H \in H$.

On a bien $x \in H$ et on en conclut, finalement : $K \subset H$.

La double inclusion nous donne le résultat cherché :

$H = K$