

Soit  $(G, +)$  un groupe et  $\varphi: G \rightarrow G'$  un morphisme de groupes.

1. Montrer que pour tout sous-groupe  $H$  de  $G$  on a :

$$\varphi^{-1}(\varphi(H)) = H + \ker \varphi$$

2. Montrer que pour tout sous-groupe  $H'$  de  $G'$  on a :

$$\varphi(\varphi^{-1}(H')) = H' \cap \text{Im } \varphi$$

---

## Analyse

Un exercice simple fournissant deux résultats généraux classiques. On peut « tranquillement » procéder par double inclusion.

---

## Résolution

### Question 1.

Soit  $x$  un élément de  $H + \ker \varphi$ .

On peut donc l'écrire :  $x = x_H + x_0$  avec  $x_H \in H$  et  $\varphi(x_0) = e'$  élément neutre de  $G'$ .

Il vient alors,  $\varphi$  étant un morphisme de groupes :

$$\varphi(x) = \varphi(x_H + x_0) = \varphi(x_H) + \varphi(x_0) = \varphi(x_H) + e' = \varphi(x_H)$$

Comme  $x_H \in H$ , on a  $\varphi(x_H) \in \varphi(H)$  et donc  $\varphi(x) \in \varphi(H)$ .

Comme  $\varphi(x) \in \varphi(H)$ , on en tire immédiatement :  $x \in \varphi^{-1}(\varphi(H))$ .

Ainsi :  $\boxed{H + \ker \varphi \subset \varphi^{-1}(\varphi(H))}$ .

Soit maintenant  $x$  un élément de  $\varphi^{-1}(\varphi(H))$ .

Par définition de l'image réciproque d'une partie, on a :  $\varphi(x) \in \varphi(H)$ .

Donc il existe  $x_H \in H$  tel que  $\varphi(x) = \varphi(x_H)$ , ce qui équivaut à  $\varphi(x - x_H) = e'$ , soit  $x - x_H \in \ker \varphi$ .

On a donc :  $x = \underbrace{x_H}_{\in H} + \underbrace{(x - x_H)}_{\in \ker \varphi} \in H + \ker \varphi$

D'où :  $\boxed{\varphi^{-1}(\varphi(H)) \subset H + \ker \varphi}$ .

La double inclusion nous donne l'égalité cherchée.

$$\varphi^{-1}(\varphi(H)) = H + \ker \varphi$$

### Question 2.

Soit  $y$  un élément de  $\varphi(\varphi^{-1}(H'))$ .

Il existe donc  $x$  dans  $\varphi^{-1}(H')$  tel que  $y = \varphi(x)$ . Ainsi,  $y$  appartient à  $\text{Im } \varphi$  mais, par définition de l'image réciproque d'une partie,  $y$  appartient également à  $H'$ .

Finalement,  $y \in \text{Im } \varphi \cap H'$  et on a donc :  $\varphi(\varphi^{-1}(H')) \subset \text{Im } \varphi \cap H'$ .

Soit maintenant  $y$  un élément de  $\text{Im } \varphi \cap H'$ .

Comme  $y \in \text{Im } \varphi$ , il existe un élément  $x$  de  $G$  tel que :  $y = \varphi(x)$ .

Mais comme  $y = \varphi(x) \in H'$ , on en déduit immédiatement que  $x \in \varphi^{-1}(H')$  et donc que

$\varphi(x) = y \in \varphi(\varphi^{-1}(H'))$ . Ainsi,  $\text{Im } \varphi \cap H' \subset \varphi(\varphi^{-1}(H'))$ .

La double inclusion nous donne l'égalité cherchée.

$$\varphi(\varphi^{-1}(H')) = \text{Im } \varphi \cap H'$$