

Soit (G, \times) un groupe et $\varphi: \begin{cases} G \rightarrow G \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ un endomorphisme.

Montrer que la loi \times est commutative.

Analyse

Un exercice simple fournissant une caractérisation générale classique de la commutativité de la loi d'un groupe.

Résolution

Dire que φ est un endomorphisme équivaut à : $\forall (x, y) \in G^2, \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, c'est-à-

dire : $\forall (x, y) \in G^2, (x \times y)^2 = x^2 \times y^2$, soit $\forall (x, y) \in G^2, (x \times y) \times (x \times y) = (x \times x) \times (y \times y)$.

En utilisant l'associativité de la loi \times , il vient : $\forall (x, y) \in G^2, x \times (y \times x) \times y = x \times (x \times y) \times y$.

Comme tous les éléments de G admettent un symétrique pour la loi \times , on peut simplifier l'égalité précédente et il vient finalement : $\forall (x, y) \in G^2, y \times x = x \times y$. En d'autres termes, la loi \times est commutative.

Résultat final

Si $x \mapsto x^2$ est un endomorphisme du groupe (G, \times) alors celui-ci est commutatif.