

On considère une urne contenant 7 boules indiscernables numérotées de 1 à 7 et l'expérience aléatoire consistant à en tirer simultanément 3.

1. Soit k un entier vérifiant $3 \leq k \leq 7$. Combien y a-t-il de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k ?
2. En déduire une expression de $\sum_{k=3}^7 \binom{k-1}{2}$ sous forme d'un unique coefficient binomial.
3. Généraliser en considérant une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n .

Analyse

La première question est un problème simple de combinaisons.

La deuxième question permet d'écrire un même nombre de deux façons différentes, chacune correspondant à une interprétation différente de ce nombre.

A la dernière question, on généralise aisément le résultat.

Résolution

Question 1.

Pour obtenir un tel tirage, il suffit de déterminer le nombre de façons de choisir 2 boules parmi les boules numérotées de 1 à $k-1$ puisque :

1. la troisième boule est parfaitement définie (elle porte le numéro k).
2. les deux autres boules doivent porter un numéro strictement inférieur à k , c'est à dire un numéro inférieur ou égal à $k-1$.

Le nombre cherché est donc le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi $k-1$, soit $\binom{k-1}{2}$.

Question 2.

La réponse à cette question est presque immédiate dès lors que l'on remarque que tout tirage de 3 boules dans l'urne est du type de la question précédente !

En effet, tout tirage comporte une boule portant le plus grand des trois numéros, ce plus grand numéro valant au moins 3. De fait, en faisant varier k (le plus grand des trois numéros) de 3 à 7 (sa valeur maximale) et en additionnant les $\binom{k-1}{2}$, on obtient « simplement » le nombre total de tirages de 3 boules parmi les 7, c'est à dire : $\binom{7}{3}$...

On a donc :

$$\sum_{k=3}^7 \binom{k-1}{2} = \binom{7}{3}$$

Question 3.

En raisonnant comme dans les deux questions précédentes mais cette fois-ci à partir d'une urne contenant n boules ($n \geq 3$), on obtient les résultats suivants :

1. Il y a encore $\binom{k-1}{2}$ tirages possibles de 3 boules tels que le numéro le plus élevé soit k (ce résultat est clairement indépendant du nombre total de boules présentes dans l'urne !).
2. On a :

$$\sum_{k=3}^n \binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}$$

En développant cette formule, on obtient : $\sum_{k=3}^n \frac{(k-1)(k-2)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Soit : $\sum_{k=3}^n (k-1)(k-2) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$.

Soit encore, en renommant les indices de la somme : $\sum_{k=1}^{n-2} k(k+1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$

On peut encore continuer et on obtient finalement :

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Deux remarques pour finir :

1. on peut aisément établir la validité de la dernière formule grâce à une récurrence simple.

2. En tenant compte de $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, la dernière formule obtenue nous permet d'écrire :

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) - \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}$$

Soit :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+1)}{6}$$

On retrouve ainsi la formule classique donnant la somme des carrés des n premiers entiers naturels :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+1)}{6}$$