

On considère un ensemble fini  $E$  de cardinal  $n$  ( $n > 0$ ).

- Combien existe-t-il de lois de composition internes sur  $E$  ?
- Combien sont commutatives ?
- Combien ont un élément neutre ?
- Combien sont commutatives et ont un élément neutre ?

---

## Analyse

L'exercice permet de lier les notions de loi de composition et de dénombrement.  
Le raisonnement principal se fait sur les choix possibles de  $x * y$ ,  $x$  et  $y$  étant deux éléments de  $E$  et  $*$  la loi de composition interne.

---

## Résolution

### Question 1.

Une loi de composition interne sur un ensemble  $E$  est une application de  $E \times E$  dans  $E$ .

Ces applications sont au nombre de :  $\text{card}(E)^{\text{card}(E \times E)}$ .

Or, on a :  $\text{card}(E \times E) = n^2$ . On en déduit donc :

Le nombre de lois de composition internes sur un ensemble fini  $E$  de cardinal  $n$  ( $n > 0$ ) est égal à :  $n^{n^2}$ .

### Question 2.

La loi de composition interne  $*$  définie sur  $E$  est commutative si, et seulement si, on a :

$$\forall (x, y) \in E^2, x * y = y * x$$

Ainsi, si l'on reprend la démarche de la question 1, dès que l'image du couple  $(x, y)$  est définie, celle du couple  $(y, x)$  l'est également.

Pour définir complètement une loi de composition interne commutative sur  $E$ , il nous suffit donc de définir les images des couples  $(x_i, x_j)$  avec  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Ces couples sont au nombre de

$$\frac{n(n+1)}{2} \text{ (calcul classique : } \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1 \text{)}.$$

Le nombre cherché est donc le nombre d'applications de l'ensemble

$F = \{(x_i, x_j) / x_i \in E, x_j \in E, 1 \leq i \leq j \leq n\}$  dans l'ensemble  $E$ .

Ce nombre vaut :  $\text{card}(E)^{\text{card}(F)} = n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ .

Le nombre de lois de composition internes commutatives  
sur un ensemble fini  $E$  de cardinal  $n$  ( $n > 0$ ) est égal à :  $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ .

### Question 3.

Soit  $*$  une loi de composition interne sur  $E$ . On suppose que  $*$  possède un élément neutre  $e$ . Nous rappelons, ce point est essentiel, que cet élément neutre est alors unique et qu'il vérifie :

$$\forall x \in E, x * e = e * x = x$$

Pour une telle loi de composition, le résultat de  $x * y$  est donc fixé dès lors que  $x$  ou  $y$  est égal à  $e$ . On va donc ici s'intéresser au sous-ensemble  $G$  de  $E \times E$  défini par :

$$G = \{(x_i, x_j) / x_i \in E, x_j \in E, x_i \neq e \text{ et } x_j \neq e\}$$

$G$  n'est autre que  $(E \setminus \{e\})^2$ .

On a donc :  $\text{card}G = \text{card}(E \setminus \{e\})^2 = (n-1)^2$ .

Dès lors que l'élément neutre  $e$  (n'oublions pas qu'il s'agit d'un élément de  $E$  !) est fixé, il convient donc de chercher le nombre d'applications de  $G$  dans  $E$ . D'après la première question, il y en a :  $n^{(n-1)^2}$ .

Enfin, l'élément neutre pouvant être choisi parmi les  $n$  éléments de  $E$ , on peut conclure :

Le nombre de lois de composition possédant un élément neutre sur un ensemble fini  $E$  de cardinal  $n$  ( $n > 0$ ) est égal à :  $n \times n^{(n-1)^2}$ .

### Question 4.

Une fois un élément neutre choisi, il convient d'obtenir la commutativité sur les  $n-1$  éléments restants, c'est à dire sur  $E \setminus \{e\}$  sans oublier que les valeurs obtenues après composition sont les

éléments de  $E$ . D'après la deuxième question, on aura  $n^{\frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}} = n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ .

Puisque nous avons toujours  $n$  possibilités de choix pour l'élément neutre, il vient finalement :

Le nombre de lois de composition commutatives possédant un élément neutre sur un ensemble fini  $E$  de cardinal  $n$  ( $n > 0$ ) est égal à :  $n \times n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ .