Calculer, pour tout couple de réels (a,b) :

$$\sum_{1\le i<j\le n}\left(ai^2+bj^2\right)$$

Analyse

La présence des réels *a* et *b* n'induit pas de difficulté particulière. Le calcul fait appel à des sommes classiques …

Résolution

Puisque $i<j$, la plus petite valeur possible de *j* est 2 et la plus grande valeur possible de *i*, pour *j* fixé, est $j-1$. On a donc, pour amorcer le calcul :

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n}\left(ai^2+bj^2\right)&=\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}\left(ai^2+bj^2\right)\right)\\&=\sum_{j=2}^{n}\left(a\sum_{i=1}^{j-1}i^2+bj^2\sum_{i=1}^{j-1}1\right)\end{aligned}$$

On utilise alors la somme classique : $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On en tire : $\sum_{i=1}^{j-1}i^2=\frac{(j-1)(j-1+1)(2(j-1)+1)}{6}=\frac{j(j-1)(2j-1)}{6}$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n}\left(ai^2+bj^2\right)&=\sum_{j=2}^{n}\left(a\sum_{i=1}^{j-1}i^2+bj^2\sum_{i=1}^{j-1}1\right)\\&=\sum_{j=2}^{n}\left(a\frac{j(j-1)(2j-1)}{6}+bj^2(j-1)\right)\\&=\frac{1}{6}\sum_{j=2}^{n}\left(aj(j-1)(2j-1)+6bj^2(j-1)\right)\\&=\frac{1}{6}\sum_{j=2}^{n}\left((2a+6b)j^3-(3a+6b)j^2+aj\right)\\&=\frac{1}{6}\left[(2a+6b)\sum_{j=2}^{n}j^3-(3a+6b)\sum_{j=2}^{n}j^2+a\sum_{j=2}^{n}j\right]\end{aligned}$$

La somme des coefficients des trois sommes apparaissant dans le crochet étant nulle, on peut remplacer le contenu du crochet par :

$$(2a+6b)\sum_{j=1}^{n} j^3-(3a+6b)\sum_{j=1}^{n} j^2+a\sum_{j=1}^{n} j$$

Ici, on doit alors utiliser : $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ et la somme mentionnée plus haut.

Il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n}\left(ai^2+bj^2\right)&=\frac{1}{6}\left[(2a+6b)\sum_{j=1}^{n} j^3-(3a+6b)\sum_{j=1}^{n} j^2+a\sum_{j=1}^{n} j\right]\\&=\frac{1}{6}\left[(2a+6b)\frac{n^2(n+1)^2}{4}-(3a+6b)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+a\frac{n(n+1)}{2}\right]\\&=\frac{1}{6}\left[(a+3b)\frac{n^2(n+1)^2}{2}-(a+2b)\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+a\frac{n(n+1)}{2}\right]\\&=\frac{1}{12}\left[(a+3b)n^2(n+1)^2-(a+2b)n(n+1)(2n+1)+an(n+1)\right]\\&=\frac{1}{12}n(n+1)\left[(a+3b)n(n+1)-(a+2b)(2n+1)+a\right]\\&=\frac{1}{12}n(n+1)\left[(a+3b)n^2-(a+b)n-2b\right]\end{aligned}$$

Le contenu du crochet est de la forme $f(n)$ où f est une fonction polynôme de degré 2.

On constate que la somme des coefficients est nulle ; on peut donc factoriser par $n-1$. On obtient facilement :

$$(a+3b)n^2-(a+b)n-2b=(n-1)\left[(a+3b)n+2b\right]$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n}\left(ai^2+bj^2\right)&=\frac{1}{12}n(n+1)\left[(a+3b)n^2-(a+b)n-2b\right]\\&=\frac{1}{12}n(n+1)(n-1)\left[(a+3b)n+2b\right]\\&=\frac{1}{12}n\left(n^2-1\right)\left[(a+3b)n+2b\right]\end{aligned}$$

Le calcul est ainsi achevé.

Résultat final

$$\sum_{1\le i<j\le n}\left(ai^2+bj^2\right)=\frac{1}{12}n\left(n^2-1\right)\left[\left(a+3b\right)n+2b\right]$$