Calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Analyse

On commence par décomposer $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ en une somme d'inverses …

Résolution

On a :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2}$$

Où A, B et C sont trois réels à déterminer.

On peut par exemple procéder par identification à partir de :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(A+B+C)k^2 + (3A+2B+C)k + 2A}{k(k+1)(k+2)}$$

On est alors conduit à résoudre le système :

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ 2A=1 \end{cases}$$

On obtient facilement : $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$ et $C = \frac{1}{2}$.

On a donc :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1/2}{k} + \frac{-1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$$

La somme se récrit alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}+\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cancel{\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}}-2\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{n+1}\cancel{-2\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cancel{\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\cancel{-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\,\frac{(n+1)(n+2)-2(n+2)+2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Résultat final

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$$