

Calculer :

$$\sum_{k=1}^n k^2 (n+1-k)$$

Analyse

Le calcul est simple et fait appel à deux sommes classiques.

Résolution

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^2 (n+1-k) &= (n+1) \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k^3 \\ &= (n+1) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{1}{12} n(n+1)^2 [2(2n+1) - 3n] \\ &= \frac{1}{12} n(n+1)^2 (n+2)\end{aligned}$$

Résultat final

$$\sum_{k=1}^n k^2 (n+1-k) = \frac{1}{12} n(n+1)^2 (n+2)$$