On considère un jeu classique de dominos.

1. Combien y a-t-il de dominos ?

2. On place les dominos dans une urne et on suppose qu'ils sont indiscernables au toucher. On tire simultanément deux dominos.

- Combien existe-t-il de tirages de dominos compatibles ?
- Combien existe-t-il de tirages de dominos incompatibles ?

3. Reprendre les questions précédentes en supposant que chaque moitié de domino peut prendre $n+1$ valeurs au lieu de sept.

Analyse

Quelques calculs classiques sur le thème des dominos … Attention aux doubles !

Résolution

Question 1.

Chaque moitié de domino peut prendre 7 valeurs (correspondant au nombre de points présents : 0 à 6). Pour simplifier le décompte, on peut distinguer les dominos doubles (les deux moitiés comportent le même nombre de points) des autres.

On a ainsi facilement 7 dominos doubles que l'on peut noter : 00, 11, 22, 33, 44, 55 et 66.

Pour ce qui est des autres dominos, il convient simplement de tirer sans remise DEUX valeurs dans l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, l'ordre étant sans importance. On doit donc déterminer le nombre N de combinaisons de deux éléments parmi 7 : $N=\binom{7}{2}=\frac{7!}{5!2!}=\frac{7\times 6}{2}=21$.

Il y a donc au total 28 dominos.

Question 2.

Avant de donner les nombres demandés, on peut noter qu'en tirant deux dominos quelconques simultanément, on a un total de $N_t = \binom{28}{2} = \frac{28 \times 27}{2} = 378$ tirages possibles. Pour chaque tirage, on a seulement deux possibilités : les dominos sont compatibles ou incompatibles. Si on note respectivement N_c et N_i le nombre de tirages de dominos compatibles et celui de dominos incompatibles, il vient immédiatement :

$$N_t = N_c + N_i = 378$$

Il s'agit d'un élément de vérification pratique.

Commençons par déterminer le nombre de tirage de deux dominos compatibles.

Les deux dominos doivent avoir une moitié « commune », par exemple : 10 et 04.
Fixons donc la valeur de cette moitié. Il y a un total de 7 dominos comportant cette moitié. Il y a donc $\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$ façons de tirer deux tels dominos.
Puisque l'on peut raisonner ainsi à partir de 7 valeurs possibles de la moitié commune, il vient : $N_c = 7 \times 21 = 147$

Il y a 147 tirages de deux dominos compatibles.

Déterminons maintenant le nombre de tirage de dominos incompatibles.

Bien que les dominos soient tirés simultanément, identifions-les par D1 et D2.

Si D1 est un domino double, tirer un domino D2 incompatible avec D1 revient à tirer un domino parmi les 27 dominos restants ne comportant pas de moitié égale à celle du double considéré. Il s'agit en fait du nombre de dominos pouvant être construits non pas avec 7 valeurs mais 6 possibles. Il y en a : $6 + \binom{6}{2} = 6 + \frac{6 \times 5}{2} = 6 + 15 = 21$. Comme il y a 7 dominos doubles, on doit multiplier le nombre précédent par 7 : $7 \times 21 = 147$.

Supposons maintenant que D1 ne soit pas double. D2 ne sera pas compatible avec D1 si ses moitiés ne correspondent pas à celles de D1. Le nombre de possibilités consiste cette fois à déterminer le nombre de dominos pouvant être construit avec 5 valeurs possibles. Il y en a : $5 + \binom{5}{2} = 5 + \frac{5 \times 4}{2} = 5 + 10 = 15$. Comme il y a 21 dominos qui ne sont pas doubles, on arrive à un total de $21 \times 15 = 315$ possibilités.

En additionnant les deux valeurs ainsi obtenues, on obtient $147 + 315 = 462$ possibilités.
Mais en ayant procédé de la sorte, chaque tirage a été comptabilisé DEUX fois. On doit donc diviser cette quantité par deux : $462 \div 2 = 231$.

Finalement :

Il y a 231 tirages de deux dominos incompatibles.

A titre de vérification (partielle !), on constate alors que l'on a bien :
$N_c + N_i = 147 + 231 = 378 = N_t$.

Question 3.

Nous reprenons les questions précédentes en supposant cette fois que le nombre de valeurs prises par les moitiés des dominos est égal à $n+1$ (dans la situation étudiée aux questions 1 et 2, on a $n=6$). Nous les notons 0, 1, 2, …, *n*.

Nous commençons par déterminer le nombre total de dominos.

Il y a $n+1$ dominos doubles.

Pour obtenir le nombre total de dominos non doubles, il suffit alors de considérer toutes les combinaisons de 2 valeurs dans l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n\}$. Il y en a :
$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Finalement :

$$N = \frac{n(n-1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n-1)+2(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Il y a au total $\boldsymbol{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$ dominos.

Comme précédemment, déterminons le nombre total N_t de tirages de deux dominos parmi $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$. Il s'agit simplement de :

$$\begin{aligned} N_t &= \binom{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}{2} \\ &= \frac{\frac{(n+2)(n+1)}{2}\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}-1\right)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)\left[(n+2)(n+1)-2\right]}{8} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{8} \end{aligned}$$

Déterminons maintenant le nombre N_c de tirages de deux dominos compatibles.

Il y a $n+1$ valeur possibles pour la moitié commune et $n+1$ dominos comportant cette moitié. Il y a $\binom{n+1}{2}$ façons de choisir deux dominos parmi eux. Il vient alors :

$$N_c = (n+1)\binom{n+1}{2} = (n+1)\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

Il y a $\boldsymbol{\frac{n(n+1)^2}{2}}$ tirages de deux dominos compatibles.

Déterminons maintenant le nombre de tirage de deux dominos incompatibles.

Comme précédemment, bien que les dominos soient tirés simultanément, identifions-les par D1 et D2.

Si D1 est un domino double, tirer un domino D2 incompatible avec D1 revient à déterminer le nombre de dominos pouvant être construits à l'aide de n valeurs. Il y en a : $n+\binom{n}{2} = n+\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Comme il y a $n+1$ domino doubles, on doit multiplier le nombre précédent par $n+1$: $\frac{n(n+1)^2}{2}$.

Supposons maintenant que D1 ne soit pas double. D2 ne sera pas compatible avec D1 si ses moitiés ne correspondent pas à celles de D1. Le nombre de possibilités consiste cette fois à déterminer le nombre de dominos pouvant être construits à partir de $n-1$ valeurs. Il y en a : $n-1+\binom{n-1}{2} = n-1+\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Comme il y a $\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}-(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$ dominos qui ne sont pas doubles, on arrive à un total de $\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n-1)(n+1)}{4}$ possibilités.

En additionnant les deux valeurs ainsi obtenues, on obtient un nombre total de possibilités de :

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)^2}{2}+\frac{n^2(n-1)(n+1)}{4} &= \frac{n(n+1)}{4}\left[2(n+1)+n(n-1)\right]\\ &= \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4}\end{aligned}$$

Mais en ayant procédé de la sorte, chaque tirage a été comptabilisé DEUX fois. On doit donc diviser cette quantité par deux et o obtient : $\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}$.

Finalement : $N_i = \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}$.

Il y a $\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}$ tirages de deux dominos incompatibles.

A titre de vérification, on constate alors que l'on a bien :

$$\begin{aligned} N_c + N_i &= \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8} \\ &= \frac{n(n+1)}{8}\left[4(n+1)+(n^2+n+2)\right] \\ &= \frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{8} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{8} \\ &= N_t \end{aligned}.$$

Remarque. On a : $\frac{N_c}{N_t} = \frac{\frac{n(n+1)^2}{2}}{\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{8}} = 4\frac{n+1}{(n+2)(n+3)}$.

Par ailleurs : $\frac{N_i}{N_t} = \frac{\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}}{\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{8}} = \frac{n^2+n+2}{(n+2)(n+3)}$.

On déduit de ces deux expressions : $\frac{N_c}{N_t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{N_i}{N_t} = 1$.

Résultat final

- **Dans un jeu de dominos classique, il y a 28 dominos. Si on tire simultanément deux dominos parmi ces 28, il y a 147 tirages de dominos compatibles et 231 tirages de dominos incompatibles.**

- **Dans un jeu de dominos « généralisés » où chaque moitié d'un domino peut prendre $n+1$ valeurs, il y a $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ dominos. Si on tire simultanément deux dominos parmi ces $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$, il y a $\frac{n(n+1)^2}{2}$ tirages de dominos compatibles et $\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}$ tirages de dominos incompatibles.**