Ecrire plus simplement :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k$$

Analyse

On s'efforce de modifier le produit $k\binom{n}{k}$ pour faire apparaître un autre coefficient binomial et récrire la somme …

Résolution

Pour $n=0$, on a immédiatement : $\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{0} k\binom{n}{k}x^k=0$.

Supposons donc : $n\geq 1$.

On a , pour $k\neq 0$:

$$k\binom{n}{k}=k\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}=n\frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(k-1)\big)!(k-1)!}=n\binom{n-1}{k-1}$$

D'où, pour tout x réel :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}x^k = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k\\ &= nx\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1} = nx\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k\\ &= nx\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k 1^{(n-1)-k} = nx(x+1)^{n-1}\end{aligned}$$

Résultat final

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{0} k\binom{n}{k}x^k=0 \text{ et, pour } n\geq 1,\ \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k = nx(x+1)^{n-1}$$