

Pour tout couple de réels (a, b) , calculer :

$$\sum_{k=0}^n (ak+b)^2$$

Analyse

On développe simplement le carré pour se ramener à une somme de ... trois sommes connues !

Résolution

En développant le carré, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (ak+b)^2 &= \sum_{k=0}^n (a^2k^2 + 2abk + b^2) \\ &= a^2 \sum_{k=0}^n k^2 + 2ab \sum_{k=0}^n k + b^2 \sum_{k=0}^n 1 \\ &= a^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2ab \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)b^2 \\ &= \frac{(n+1)}{6} [a^2n(2n+1) + 6abn + 6b^2] \\ &= \frac{1}{6}(n+1)[2a^2n^2 + a(a+6b)n + 6b^2] \end{aligned}$$

Résultat final

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \sum_{k=0}^n (ak+b)^2 = \frac{1}{6}(n+1)[2a^2n^2 + a(a+6b)n + 6b^2]$$