

Calculer :

$$\sum_{k=0}^n k \times k!$$

Analyse

On modifie l'expression $k \times k!$ pour faire apparaître une différence de deux factorielles ...

Résolution

La somme se réécrit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n k \times k! &= \sum_{k=0}^n ((k+1)-1) \times k! \\ &= \sum_{k=0}^n ((k+1) \times k! - k!) \\ &= \sum_{k=0}^n ((k+1)! - k!) \\ &= \sum_{k=0}^n (k+1)! - \sum_{k=0}^n k!\end{aligned}$$

A partir de : $\sum_{k=0}^n (k+1)! = \sum_{k=1}^{n+1} k!$, il vient alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n k \times k! &= \sum_{k=0}^n (k+1)! - \sum_{k=0}^n k! \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k! - \sum_{k=0}^n k! \\ &= (n+1)! + \cancel{\sum_{k=1}^n k!} - \cancel{\sum_{k=1}^n k!} - 0! \\ &= (n+1)! - 0! \\ &= (n+1)! - 1\end{aligned}$$

Finalement :

$$\sum_{k=0}^n k \times k! = (n+1)! - 1$$

Résultat final

$$\sum_{k=0}^n k \times k! = (n+1)! - 1$$