Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k(n-k)}{n(n-1)}$$

Analyse

On développe le numérateur pour faire apparaître deux sommes classiques …

Résolution

Remarquons d'abord que pour $k=0$ et $k=n$, le produit $k(n-k)$ est nul. On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k(n-k)}{n(n-1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n(n-1)}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n(n-1)} &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \left(kn-k^2\right) = \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{k=1}^{n-1} kn - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right] \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left[n\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right]
\end{aligned}$$

En utilisant les sommes classiques : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$, il vient enfin :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n(n-1)} &= \frac{1}{n(n-1)} \left[n\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right] \\
&= \frac{1}{\cancel{n(n-1)}} \left[n\frac{\cancel{(n-1)n}}{2} - \frac{\cancel{(n-1)n}\,(2n-1)}{6}\right] \\
&= \frac{n}{2} - \frac{2n-1}{6} \\
&= \frac{n+1}{6}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n(n-1)} = \frac{n+1}{6}$$

Résultat final

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{k(n-k)}{n(n-1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n(n-1)} = \frac{n+1}{6}}$$