Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} k^4$$

Analyse

On adopte des démarches similaires pour les deux calculs. L'idée essentielle consiste à se ramener à des sommes connues en travaillant, par exemple pour la 1ère somme, avec $(k+1)^4$.

Résolution

Pour simplifier les écritures, nous notons, pour tout p entier naturel : $S_p = \sum_{k=0}^{n} k^p$.

Dans cet exercice, on doit donc calculer S_3 et S_4.

Rappelons, par ailleurs, que l'on a :

$$S_0 = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1, \; S_1 = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^4 = \sum_{k=1}^{n+1} k^4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 + (n+1)^4 = \sum_{k=0}^{n} k^4 + (n+1)^4 = S_4 + (n+1)^4$$

Mais on a également :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (k+1)^4 &= \sum_{k=0}^{n} \left(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^4 + 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= S_4 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + S_0\end{aligned}$$

Les deux expressions obtenues nous permettent donc d'écrire :

$$S_4 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + S_0 = S_4 + (n+1)^4$$

Soit :

$$4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + S_0 = (n+1)^4$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{1}{4}\left[(n+1)^4 - 6S_2 - 4S_1 - S_0\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)\right] \\
&= \frac{1}{4}(n+1)\left[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\right] \\
&= \frac{1}{4}(n+1)\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1\right) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)\left(n^3 + n^2\right) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)n^2(n+1) \\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\
&= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2
\end{aligned}$$

On retrouve le résultat « classique » : $S_3 = S_2^2$.

$$\boxed{S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$$

Pour le second calcul, nous procédons de la même façon :

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5 = \sum_{k=1}^{n+1}k^5 = \sum_{k=1}^{n}k^5 + (n+1)^5 = \sum_{k=0}^{n}k^5 + (n+1)^5 = S_5 + (n+1)^5$$

Mais on a également :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5 &= \sum_{k=0}^{n}\left(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}k^5 + 5\sum_{k=0}^{n}k^4 + 10\sum_{k=0}^{n}k^3 + 10\sum_{k=0}^{n}k^2 + 5\sum_{k=0}^{n}k + \sum_{k=0}^{n}1 \\
&= S_5 + 5S_4 + 10S_3 + 10S_2 + 5S_1 + S_0
\end{aligned}$$

Les deux expressions obtenues nous permettent donc d'écrire :

$$S_5 + 5S_4 + 10S_3 + 10S_2 + 5S_1 + S_0 = S_5 + (n+1)^5$$

Soit :

$$5S_4 + 10S_3 + 10S_2 + 5S_1 + S_0 = (n+1)^5$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
S_4 &= \frac{1}{5}\left[(n+1)^5 - 10S_3 - 10S_2 - 5S_1 - S_0\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[(n+1)^5 - 10\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)\right] \\
&= \frac{n+1}{5}\left[(n+1)^4 - 5\frac{n^2(n+1)}{2} - 5\frac{n(2n+1)}{3} - 5\frac{n}{2} - 1\right] \\
&= \frac{n+1}{30}\left[6(n+1)^4 - 15n^2(n+1) - 10n(2n+1) - 15n - 6\right] \\
&= \frac{n+1}{30}\left(6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 15n^3 - 15n^2 - 20n^2 - 10n - 15n - 6\right) \\
&= \frac{n+1}{30}\left(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{30}\left(6n^3 + 9n^2 + n - 1\right)
\end{aligned}$$

On peut factoriser $6n^3 + 9n^2 + n - 1$ sous la forme : $(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$ (remarque : la factorisation de $3n^2 + 3n - 1$ fait apparaître des racines irrationnelles qui ne conduisent à aucune simplification d'écriture particulière …).

Finalement :

$$\boxed{S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}$$

Résultat final

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$