Calculer :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j),\ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\min(i,j)\ \text{et}\ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\max(i,j)$$

Analyse

Dans les trois cas, on se ramène à des sommes classiques en fixant l'indice *i*. La deuxième et la troisième somme peuvent faire l'objet de traitements similaires mais on peut aussi réfléchir à ce que vaut… leur somme !

Résolution

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j) &= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} i+\sum_{j=0}^{n} j\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left((n+1)i+\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= (n+1)\sum_{i=0}^{n}\left(i+\frac{n}{2}\right)\\
&= (n+1)\left(\sum_{i=0}^{n} i+\sum_{i=0}^{n}\frac{n}{2}\right)\\
&= (n+1)\left(\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\frac{n}{2}\right)\\
&= n(n+1)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j)=n(n+1)^2}$$

Pour *i* fixé, on a :

$$\min(i,j)=\begin{cases} i \text{ si } j>i\\ j \text{ si } j\le i\end{cases}$$

On peut donc écrire : $\sum_{j=0}^{n}\min(i,j)=\sum_{j=0}^{i}j+\sum_{j=i+1}^{n}i$ (remarque : la deuxième somme n'est pas définie pour $i=n$).

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\min(i,j)&=\sum_{j=0}^{i}j+\sum_{j=i+1}^{n}i\\&=\frac{i(i+1)}{2}+i\times(n-i)\\&=\frac{1}{2}\left(i^2+i+2ni-2i^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(-i^2+(2n+1)i\right)\end{aligned}$$

Lorsque $i=n$, la deuxième ligne du calcul ci-dessus donne : $\frac{i(i+1)}{2}+i\times(n-i)=\frac{n(n+1)}{2}$.

Or, dans ce cas, $\sum_{j=0}^{n}\min(i,j)=\sum_{j=0}^{n}\min(n,j)=\sum_{j=0}^{n}j=\frac{n(n+1)}{2}$. La formule que nous venons d'obtenir est donc valable pour toutes les valeurs de *i*.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\min(i,j)&=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2}\left(-i^2+(2n+1)i\right)\\&=-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}i^2+\frac{2n+1}{2}\sum_{i=0}^{n}i\\&=-\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2n+1}{2}\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\min(i,j)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Pour calculer $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\max(i,j)$, nous pouvons remarquer que l'on a :

$$\forall(i,j)\in\{0,1,2,\ldots,n\}^2,\min(i,j)+\max(i,j)=i+j$$

On en tire donc immédiatement :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\min(i,j)+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\max(i,j)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\max(i,j)&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j)-\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\min(i,j)\\&=n(n+1)^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{n(n+1)}{6}\left[6(n+1)-(2n+1)\right]\\&=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\max(i,j)=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}}$$

Nous allons cependant procéder comme pour le calcul de $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\min(i,j)$.

Pour i fixé, on a :

$$\max(i,j)=\begin{cases} j \text{ si } j>i\\ i \text{ si } j\le i\end{cases}$$

On peut donc écrire : $\sum_{j=0}^{n}\max(i,j)=\sum_{j=0}^{i}i+\sum_{j=i+1}^{n}j$ (remarque : ici encore, la deuxième somme n'est pas définie pour $i=n$).

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\max(i,j)&=\sum_{j=0}^{i}i+\sum_{j=i+1}^{n}j\\&=\sum_{j=0}^{i}i+\sum_{j=0}^{n}j-\sum_{j=0}^{i}j\\&=(i+1)i+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{i(i+1)}{2}\\&=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{i(i+1)}{2}\\&=\frac{1}{2}\left[i^2+i+n(n+1)\right]\end{aligned}$$

Lorsque $i=n$, la troisième ligne du calcul ci-dessus donne :
$(i+1)i+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{i(i+1)}{2}=n(n+1)$.

Or, dans ce cas, $\sum_{j=0}^{n}\max(i,j)=\sum_{j=0}^{n}\max(n,j)=\sum_{j=0}^{n}n=n(n+1)$. La formule que nous venons d'obtenir est donc valable pour toutes les valeurs de *i*.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\max(i,j) &= \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2}\left[i^2+i+n(n+1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=0}^{n}n(n+1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}+n(n+1)^2\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{12}\left[(2n+1)+3+6(n+1)\right] \\
&= \frac{n(n+1)}{12}(8n+10) \\
&= \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}
\end{aligned}$$

On a ainsi retrouvé le résultat obtenu précédemment.

Résultat final

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j)=n(n+1)^2$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\min(i,j)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\max(i,j)=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$