Montrer que l'on a :

$$\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2,\ \sum_{i=0}^{p}\binom{p+q}{i}\binom{p+q-i}{p-i}=2^p\binom{p+q}{p}$$

Analyse

On s'intéresse au produit $\binom{p+q}{i}\binom{p+q-i}{p-i}$ que l'on transforme facilement. La forme des facteurs du deuxième membre de l'égalité nous conduit alors à effectuer des transformations appropriées.

Résolution

On a, pour tout couple d'entiers naturels (p,q) et tout entier naturel i inférieur à p :

$$\begin{aligned}\binom{p+q}{i}\binom{p+q-i}{p-i}&=\frac{(p+q)!}{i!\cancel{(p+q-i)!}}\times\frac{\cancel{(p+q-i)!}}{(p-i)!q!}\\&=\frac{(p+q)!}{i!q!(p-i)!}\end{aligned}$$

On a alors immédiatement :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p}\binom{p+q}{i}\binom{p+q-i}{p-i}&=\sum_{i=0}^{p}\frac{(p+q)!}{i!q!(p-i)!}\\&=\frac{(p+q)!}{q!}\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i!(p-i)!}\end{aligned}$$

Le facteur $\frac{(p+q)!}{q!}$ nous permet de faire apparaître $\binom{p+q}{p}$. On a en effet :

$$\frac{(p+q)!}{q!}=p!\frac{(p+q)!}{p!q!}=p!\binom{p+q}{p}$$

On en tire alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p}\binom{p+q}{i}\binom{p+q-i}{p-i} &= \frac{(p+q)!}{q!}\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i!(p-i)!}\\ &= p!\binom{p+q}{p}\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i!(p-i)!}\\ &= \binom{p+q}{p}\sum_{i=0}^{p}\frac{p!}{i!(p-i)!}\\ &= \binom{p+q}{p}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\end{aligned}$$

On a l'égalité classique (on rappelle rapidement comment l'obtenir) :

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}=\sum_{i=0}^{p}1^i1^{p-i}\binom{p}{i}=(1+1)^p=2^p$$

On obtient finalement le résultat cherché :

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{p+q}{i}\binom{p+q-i}{p-i}=\binom{p+q}{p}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}=2^p\binom{p+q}{p}$$

Résultat final

$$\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2,\ \sum_{i=0}^{p}\binom{p+q}{i}\binom{p+q-i}{p-i}=2^p\binom{p+q}{p}$$