1. Montrer que pours tous entiers naturels $n$ et $p$ tels que $1 \leq p \leq n$, on a :

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

2. Montrer que pours tous entiers naturels $n$ et $p$ tels que $2 \leq p \leq n$, on a :

$$p(p-1)\binom{n}{p} = n(n-1)\binom{n-2}{p-2}$$

3. Généraliser.

## Analyse

Les deux premières égalités découlent de manipulations simples de factorielles (on peut indifféremment établir les égalités en partant du membre de gauche ou du membre de droite). La forme des deux premières égalités permet de conjecturer celle d'une égalité plus générale que l'on établit ensuite via, encore une fois, des manipulations de factorielles ou un raisonnement par récurrence sur l'entier approprié.

## Résolution

### *Question 1.*

On a, en tenant compte du fait que $n$ et $p$ sont supérieurs ou égaux à 1 :

$$\begin{aligned} p\binom{n}{p} &= p\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} \\ &= \frac{n\times(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = n\frac{(n-1)!}{(p-1)!\left[(n-1)-(p-1)\right]!} \\ &= n\binom{n-1}{p-1} \end{aligned}$$

La première égalité est bien vérifiée.

## *Question 2.*

Nous proposons ici deux approches.

1ère approche.

Dans cette question, on a : $2 \le p \le n$. D'où : $1 \le p-1 \le n-1$. Les hypothèses de la première question sont donc vérifiées avec $p-1$ et $n-1$. On a donc l'égalité :

$$(p-1)\binom{n-1}{p-1} = (n-1)\binom{(n-1)-1}{(p-1)-1}$$

C'est-à-dire :

$$(p-1)\binom{n-1}{p-1} = (n-1)\binom{n-2}{p-2}$$

On en tire alors, en multipliant par *n* chaque membre de cette égalité :

$$n(p-1)\binom{n-1}{p-1} = n(n-1)\binom{n-2}{p-2}$$

Or, d'après la première question : $n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p}$. On en déduit finalement :

$$p(p-1)\binom{n}{p} = n(n-1)\binom{n-2}{p-2}$$

La deuxième égalité est ainsi établie.

2ème approche.

On procède de façon analogue à ce qui a été fait à la question 1 :

$$\begin{aligned} p(p-1)\binom{n}{p} &= p(p-1)\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-2)!(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)\times(n-2)!}{(p-2)!(n-p)!} = n(n-1)\frac{(n-2)!}{(p-2)!\left[(n-2)-(p-2)\right]!} \\ &= n(n-1)\binom{n-2}{p-2} \end{aligned}$$

## *Question 3.*

Soit *k* un entier naturel.

D'après les questions précédentes, on peut postuler :

Pour tous *n* et *p* tels que $k+1 \leq p \leq n$, on a :

$$p(p-1)...(p-k)\binom{n}{p} = n(n-1)...(n-k)\binom{n-(k+1)}{p-(k+1)}$$

On peut effectuer directement des manipulations de factorielles mais on peut également mener un raisonnement par récurrence <u>sur l'entier *k*</u>.

Les cas $k=0$ (initialisation) et $k=1$ (inutile, à proprement parler, pour mener la récurrence) ont été traités dans le cadre des deux questions précédentes.

Supposons que l'égalité soit vérifiée pour un entier naturel *k* donné. On a donc (hypothèse de récurrence) :

$$p(p-1)...(p-k)\binom{n}{p} = n(n-1)...(n-k)\binom{n-(k+1)}{p-(k+1)}$$

Considérons maintenant l'entier $k+1$ et donnons-nous deux entiers *p* et *n* tels que : $k+2 \leq p \leq n$.

Dans ces conditions, on a : $k+1 \leq p-1 \leq n-1$ (cf. la question 2). On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence aux entiers $p-1$ et $n-1$ :

$$(p-1)((p-1)-1)...((p-1)-k)\binom{n-1}{p-1} = (n-1)((n-1)-1)...((n-1)-k)\binom{(n-1)-(k+1)}{(p-1)-(k+1)}$$

C'est-à-dire :

$$(p-1)(p-2)...(p-(k+1))\binom{n-1}{p-1} = (n-1)(n-2)...(n-(k+1))\binom{n-(k+2)}{p-(k+2)}$$

De façon analogue à ce qui a été fait à la question 2, on multiplie chaque membre de cette égalité par l'entier *n* :

$$n(p-1)(p-2)...(p-(k+1))\binom{n-1}{p-1} = n(n-1)(n-2)...(n-(k+1))\binom{n-(k+2)}{p-(k+2)}$$

Or, d'après la première question : $n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p}$. On en déduit finalement :

$$p(p-1)(p-2)...(p-(k+1))\binom{n}{p} = n(n-1)(n-2)...(n-(k+1))\binom{n-(k+2)}{p-(k+2)}$$

L'égalité est ainsi vérifié pour l'entier naturel $k+1$.

Conclusion : l'égalité est vérifiée pour tout entier naturel *k*.

On a donc, finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (p,n) \in \mathbb{N}^2,$$
$$k+1 \leq p \leq n \Rightarrow p(p-1)\dots(p-k)\binom{n}{p} = n(n-1)\dots(n-k)\binom{n-(k+1)}{p-(k+1)}$$