Un digicode comporte douze touches : les dix chiffres 0, 1, 2, ..., 9 et deux lettres A et B.
Un code est composé des deux lettres A et B et de quatre chiffres, tous différents.

On s'intéresse au nombre N de codes que l'on peut ainsi constituer.

1. Mathieu raisonne comme suit :

   « J'ai douze symboles possibles : A, B, 1, 2, 3, …, 8 et 9. Je dois dénombrer toutes les listes ordonnées de six de ces symboles comportant une fois et une seule un symbole donné. Le nombre de ces listes vaut donc : $12\times11\times10\times9\times8\times7$. »

   Expliquer en quoi Mathieu se trompe.

2. Déterminer N.

Analyse

Un petit exercice où le résultat (obtention du nombre N) ne se résume pas (comme souvent en matière de dénombrement !) à l'utilisation d'une formule du cours. On doit prendre garde au fait que les lettres et les chiffres ne jouent pas ici des rôles équivalents …

Résolution

Question 1.

En « globalisant » comme il le fait les douze symboles disponibles, Mathieu ne tient en fait pas compte d'une contrainte forte : les lettres A et B doivent impérativement apparaître dans le code !
Ainsi, avec son approche, consistant fondamentalement à choisir 6 symboles parmi les 12, il permet la constitution de codes comme : 1 5 A 9 3 7 ou 9 6 2 5 4 1 qui ne sont pas valides.

Question 2.

On commence par choisir les 2 positions des lettres A et B parmi les 6 disponibles.

Il y a : $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6\times 5}{2} = 15$ possibilités.

Attention ! Pour chaque paire de positions ainsi considérée, on peut disposer les lettres dans l'ordre AB ou dans l'ordre BA :

$$\boxed{A}\ \square\ \square\ \boxed{B}\ \square\ \square$$
$$\boxed{B}\ \square\ \square\ \boxed{A}\ \square\ \square$$

Il convient donc de ne pas oublier le facteur 2 !

Ensuite, on doit déterminer le nombre de liste ordonnée de 4 chiffres différents choisis parmi 10 (c'est-à-dire le nombre d'arrangements de 4 chiffres parmi 10). Le nombre de possibilités s'élève à : $10\times 9\times 8\times 7 = 5\,040$.

En définitive :

$$N = 2\times 15\times 5\,040 = 151\,200$$

On peut constituer un total de 151 200 codes comportant exactement les lettres A et B et quatre chiffres tous différents.