1. De combien de façons peut-on disposer 6 personnes autour d'une table ronde ?

2. Généraliser.

Analyse

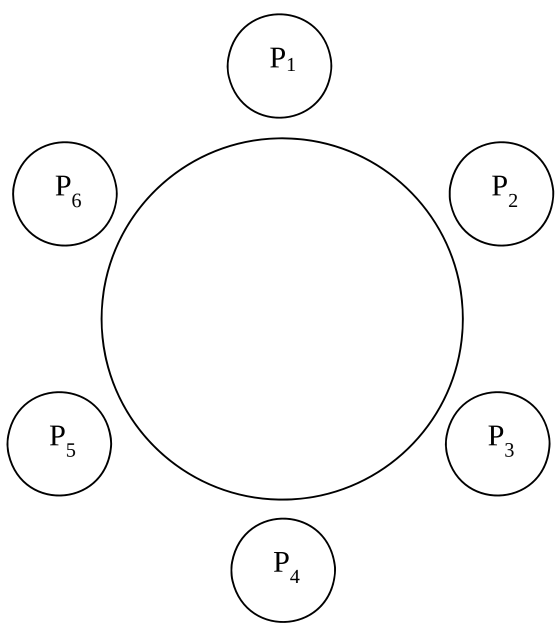
Un petit exercice classique où l'on ne doit pas trop rapidement utiliser un calcul (simple) du cours.

Résolution

Question 1.

Toute la difficulté du calcul réside dans le fait que la disposition des personnes autour de la table ne peut pas être modélisée par une liste des éléments (tous distincts) d'un ensemble à 6 éléments (permutation) …

Nous pouvons en partie nous ramener à une telle approche en numérotant P_1, P_2, …, P_6 les places autour de la table (cf. la figure ci-dessous).



Dans CE CAS, une disposition de 6 personnes autour de la table est clairement définie par l'attribution de chacune des 6 places à une et une seule personne. Il s'agit alors de dénombrer le les permutations d'un ensemble à 6 éléments. Il y en a : 6 !

Mais dans la situation qui nous intéresse, il n'y a pas de numérotation des places ! Fondamentalement, l'élément arbitraire introduit dans la démarche ci-dessus est le choix de l'emplacement de la place P_1. Il y a 6 possibilités pour cette place et cela entraîne que le nombre obtenu ci-dessus (6 !) est … 6 fois trop élevé ! D'un point de vue plus géométrique, l'approche ci-dessus ne tient pas compte du nombre (6) de symétries axiales de l'hexagone régulier …

On pourrait également relever un autre élément arbitraire : le sens dans lequel on parcourt la table pour numéroter les places : sens horaire ou antihoraire. En fait, cet arbitraire est sans conséquence puisque à toute permutation de 6 éléments (ou plus généralement de *n* éléments) est associée une et une seule permutation symétrique. Par exemple :

$$1-6-3-5-2-4 \quad \leftrightarrow \quad 4-2-5-3-6-1$$

En définitive :

$$\boxed{\text{Il y a : } \frac{6!}{6}=5!=120 \text{ façons de disposer 6 personnes autour d'une table ronde.}}$$

Question 2.

Si l'on raisonne maintenant avec *n* personnes, on a la généralisation immédiate, le raisonnement étant identique à celui mené ci-dessus :

$$\boxed{\text{Il y a : } \frac{n!}{n}=(n-1)! \text{ façons de disposer } n \text{ personnes autour d'une table ronde.}}$$