Calculer la somme :

$$S=\sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k\,2^{k-1}$$

Analyse

Encore et toujours revenir au développement de la puissance d'une somme …

Résolution

On a :

$$\begin{aligned}
S&=\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{k}(-1)^k\,2^{k-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{k}(-1)^k\,2^{k}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{k}(-2)^k=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}(-2)^k-\binom{2n}{0}(-2)^0\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}(-2)^k-1\right]=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}(-2)^k\,1^{2n-k}-1\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[(-2+1)^{2n}-1\right]=\frac{1}{2}(1-1)\\
&=0
\end{aligned}$$

Résultat final

$$S=\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{k}(-1)^k\,2^{k-1}=0$$