Calculer, pour tout entier naturel $n$ non nul, la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{1+k} \binom{n-1}{k}$$

## Analyse

Encore et toujours revenir au développement (ici à un terme près !) de la puissance d'une somme …

## Résolution

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{1+k} \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{1+k} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-1)!}{(k+1)!(n-1-k)!} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \\
&= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = -\frac{1}{n} \left[ \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} - 1 \right] \\
&= -\frac{1}{n} \left[ \sum_{i=0}^{n} 1^{n-i} (-1)^i \binom{n}{i} - 1 \right] = -\frac{1}{n} \left[ (1+(-1))^n - 1 \right] \\
&= -\frac{1}{n} (0^n - 1) = -\frac{1}{n} (0-1) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Par exemple, avec $n = 5$ :

$$S_5 = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \frac{1}{1+k} \binom{4}{k} = \frac{1}{5}$$

Soit :

$$S_5 = \binom{4}{0} - \frac{1}{2}\binom{4}{1} + \frac{1}{3}\binom{4}{2} - \frac{1}{4}\binom{4}{3} + \frac{1}{5}\binom{4}{4} = \frac{1}{5}$$

On aura ainsi remarqué que le dernier terme de la somme ($\frac{1}{5}\binom{4}{4}$) est égal … à la somme elle-même ! Plus généralement, si *n* est impair (soit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$), le dernier terme de la somme vaut : $(-1)^{n-1} \frac{1}{1+(n-1)}\binom{n-1}{n-1} = (-1)^{2m} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} = S_n$.

En revanche, si *n* est pair (soit $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$), le dernier terme de la somme vaut : $(-1)^{n-1} \frac{1}{1+(n-1)}\binom{n-1}{n-1} = (-1)^{2m-1} \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} = -S_n$. Par exemple, avec $n = 6$ :

$$S_6 = \binom{5}{0} - \frac{1}{2}\binom{5}{1} + \frac{1}{3}\binom{5}{2} - \frac{1}{4}\binom{5}{3} + \frac{1}{5}\binom{5}{4} - \frac{1}{6}\binom{5}{5} = \frac{1}{6}$$

## Résultat final

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{1+k}\binom{n-1}{k} = \frac{1}{n}$$