Calculer, pour tout entier naturel n non nul, les sommes :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

Analyse

Deux calculs de base pour s'entraîner à manipuler des sommes, en particulier ici en réindexant.

Résolution

S'agissant de la première somme, on peut supposer $n \geq 1$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\left[(n-1)-(k-1)\right]!} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\left[(n-1)-k\right]!} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}
\end{aligned}$$

On a classiquement : $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$ (somme des coefficients binomiaux de la n-ième ligne du triangle de Pascal) et, finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}}$$

On constate que l'expression obtenue reste valable pour $n = 0$.

Pour la deuxième somme, nous procédons de façon tout à fait similaire :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!\left[(n+1)-(k+1)\right]!} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0}\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)}$$

Résultat final

Pour tout n entier naturel :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$