

Soit n un entier naturel.
Calculer les sommes :

$$\sum_{i+j=n} i j \text{ et } \sum_{i+j+k=n} i j k$$

Analyse

Le premier calcul est assez simple et sert, comme on peut s'en douter, au second.

Résolution

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=n} i j &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} i j = \sum_{i=0}^n i(n-i) = n \sum_{i=0}^n i - \sum_{i=0}^n i^2 \\ &= n \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{6} [3n - (2n+1)] \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{6} \\ &= \frac{n(n^2-1)}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i+j=n} i j = \frac{n(n^2-1)}{6}}$$

Pour le calcul de la deuxième somme, on va tirer parti du résultat obtenu ci-dessus.
On a d'abord :

$$\sum_{i+j+k=n} i j k = \sum_{k=0}^n k \sum_{i+j=n-k} i j$$

D'après le résultat précédent, on a :

$$\sum_{i+j=n-k} i j = \frac{(n-k)[(n-k)^2-1]}{6}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i+j+k=n} i j k &= \sum_{k=0}^n k \frac{(n-k)[(n-k)^2-1]}{6} \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^n (kn-k^2)[n^2-1-2kn+k^2] \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^n [-k^4+3nk^3-(3n^2-1)k^2+n(n^2-1)k] \\
 &= \frac{1}{6} \left\{ -\sum_{k=0}^n k^4 + 3n \sum_{k=0}^n k^3 - (3n^2-1) \sum_{k=0}^n k^2 + n(n^2-1) \sum_{k=0}^n k \right\}
 \end{aligned}$$

En utilisant classiquement :

- $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$;
- $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;
- $\sum_{k=0}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i+j+k=n} i j k &= \frac{1}{6} \left\{ -\sum_{k=0}^n k^4 + 3n \sum_{k=0}^n k^3 - (3n^2-1) \sum_{k=0}^n k^2 + n(n^2-1) \sum_{k=0}^n k \right\} \\
 &= \frac{1}{6} \left[-\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} + 3n \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right. \\
 &\quad \left. - (3n^2-1) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n^2-1) \frac{n(n+1)}{2} \right] \\
 &= \frac{n(n+1)}{360} \left[-2(2n+1)(3n^2+3n-1) + 45n^2(n+1) - 10(3n^2-1)(2n+1) + 30n(n^2-1) \right] \\
 &= \frac{n(n+1)}{360} \left[(-4n-2)(3n^2+3n-1) + 45n^3 + 45n^2 - 10(6n^3+3n^2-2n-1) + 30n^3 - 30n \right] \\
 &= \frac{n(n+1)}{360} \left[-12n^3 - 12n^2 + 4n - 6n^2 - 6n + 2 + 45n^3 + 45n^2 - 60n^3 - 30n^2 + 20n + 10 + 30n^3 - 30n \right] \\
 &= \frac{n(n+1)}{360} (3n^3 - 3n^2 - 12n + 12) = \frac{n(n+1)}{120} (n^3 - n^2 - 4n + 4) \\
 &= \frac{n(n+1)}{120} [n^2(n-1) - 4(n-1)] = \frac{n(n+1)}{120} (n-1)(n^2-4) \\
 &= \frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{120}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i+j+k=n} i j k = \frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{120}$$

Par exemple, avec $n = 3$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i+j+k=3} i j k &= \cancel{0 \times 0 \times 3} + \cancel{0 \times 1 \times 2} + \cancel{0 \times 2 \times 1} \\ &\quad + \cancel{1 \times 0 \times 2} + 1 \times 1 \times 1 + \cancel{1 \times 2 \times 0} \\ &\quad + \cancel{2 \times 0 \times 1} + \cancel{2 \times 1 \times 0} + \cancel{3 \times 0 \times 0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Avec la formule obtenue, il vient :

$$\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{120} = \frac{3 \times (3^2-1) \times (3^2-4)}{120} = \frac{3 \times 8 \times 5}{120} = 1$$

Résultat final

Pour tout n entier naturel :

$$\sum_{i+j=n} i j = \frac{n(n^2-1)}{6}$$

$$\sum_{i+j+k=n} i j k = \frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{120}$$