Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Calculer les sommes :

$$\sum_{A\subset E}\operatorname{card}(A),\ \sum_{\substack{A\subset E\\ B\subset E}}\operatorname{card}(A\cap B)\text{ et }\sum_{\substack{A\subset E\\ B\subset E}}\operatorname{card}(A\cup B)$$

Analyse

Le premier calcul est assez simple. Pour les deux autres, on aura intérêt à fixer le cardinal d'une intersection (ou d'une union) et dénombrer les configurations correspondantes pour, dans un deuxième temps, faire varier ce cardinal.

Résolution

Soit A une partie de E de cardinal égal à p ($p\in[\![0\,;n]\!]$).

Le nombre de parties de E de cardinal p est égal à : $\binom{n}{p}$ et la somme des cardinaux de toutes ces parties est égale à : $p\binom{n}{p}$.

Il vient donc : $\displaystyle\sum_{A\subset E}\operatorname{card} A=\sum_{p=0}^{n}p\binom{n}{p}$.

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}p\binom{n}{p}&=\sum_{p=0}^{n}p\frac{n!}{p!(n-p)!}=\sum_{p=1}^{n}p\frac{n!}{p!(n-p)!}\\&=\sum_{p=1}^{n}\frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}=n\sum_{p=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(p-1)!\big((n-1)-(p-1)\big)!}\\&=n\sum_{p=1}^{n}\binom{n-1}{p-1}=n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}\\&=n\,2^{n-1}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{A\subset E}\operatorname{card} A=n\,2^{n-1}}$$

On s'intéresse maintenant à $\sum_{\substack{A\subset E\\ B\subset E}} \text{card}\left(A\cap B\right)$.

On va raisonner sur la valeur p de $\text{card}\left(A\cap B\right)$ qui appartient à $[\![0\,;n]\!]$.

Soit donc p fixé dans $[\![0\,;n]\!]$ et soit p éléments de E fixés également. Il y a $\binom{n}{p}$ façons de choisir ces p éléments dans E.

On va chercher le nombre de paires $\{A, B\}$ ayant pour intersection les p éléments fixés.

Pour la partie A, nous complétons les p éléments de l'intersection par k éléments dans les $n-p$ restants : il y a $\binom{n-p}{k}$ possibilités. Pour B, il ne reste alors plus que $n-p-k$ éléments pouvant être choisis. On en choisi k' et il y a $\binom{n-p-k}{k'}$ façons de le faire.

Le nombre de paires $\{A, B\}$ cherchée vaut alors : $\sum_{k=0}^{n-p}\left[\binom{n-p}{k}\sum_{k'=0}^{n-p-k}\binom{n-p-k}{k'}\right]$.

On a immédiatement :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-p}\left[\binom{n-p}{k}\sum_{k'=0}^{n-p-k}\binom{n-p-k}{k'}\right] &= \sum_{k=0}^{n-p}\left[\binom{n-p}{k}2^{n-p-k}\right]\\ &= \sum_{k=0}^{n-p}\left[\binom{n-p}{k}2^{n-p-k}1^{n-p}\right]\\ &= 3^{n-p}\end{aligned}$$

L'intersection de ces 3^{n-p} paires de parties de E correspond donc aux p éléments initialement fixés. La somme des cardinaux de ces intersections vaut donc : . $p\times 3^{n-p}$. Comme on peut choisir les p éléments fixés de $\binom{n}{p}$ façons différentes, on en déduit finalement que la somme des cardinaux des intersections de p éléments dans un ensemble de n éléments vaut : $p\times 3^{n-p}\times\binom{n}{p}$.

Il nous suffit maintenant de faire varier p dans $[\![0\,;n]\!]$:

$$\sum_{\substack{A\subset E\\ B\subset E}} \text{card}\left(A\cap B\right) = \sum_{p=0}^{n} p\times 3^{n-p}\times\binom{n}{p}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n} p\times 3^{n-p}\times\binom{n}{p} &= \sum_{p=0}^{n} p\times\frac{n!}{p!(n-p)!}\times 3^{n-p} = \sum_{p=1}^{n} p\times\frac{n!}{p!(n-p)!}\times 3^{n-p}\\
&= \sum_{p=1}^{n}\frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}\times 3^{n-p} = n\sum_{p=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(p-1)!\big((n-1)-(p-1)\big)!}\times 3^{n-p}\\
&= n\sum_{p=1}^{n}\binom{n-1}{p-1}\times 3^{n-p} = n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}\times 3^{n-p-1}\\
&= n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}\times 3^{n-p-1}\times 1^{p} = n\,(3+1)^{n-1}\\
&= n\,4^{n-1}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{\substack{\mathrm{A}\subset\mathrm{E}\\ \mathrm{B}\subset\mathrm{E}}}\operatorname{card}\left(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\right) = n\,4^{n-1}}$$

Par exemple, avec $n=3$, en notant $\mathrm{E}=\{a,b,c\}$ et en ne retenant que les paires A et B d'intersection non vide, on a :

A	B	A $\cap$ B	card $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	1
$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a\}$	1
$\{a,b\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	1
$\{a\}$	$\{a,c\}$	$\{a\}$	1
$\{a,c\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	1
$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a\}$	1
$\{a,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a\}$	1
$\{a\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a\}$	1
$\{a,b,c\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	1
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b\}$	1
$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	1
$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{b\}$	1
$\{b\}$	$\{b,c\}$	$\{b\}$	1
$\{b,c\}$	$\{b\}$	$\{b\}$	1
$\{a,b\}$	$\{b,c\}$	$\{b\}$	1
$\{b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	1
$\{b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{b\}$	1
$\{a,b,c\}$	$\{b\}$	$\{b\}$	1

$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$	1
$\{c\}$	$\{a, c\}$	$\{c\}$	1
$\{a, c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$	1
$\{c\}$	$\{b, c\}$	$\{c\}$	1
$\{b, c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$	1
$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	$\{c\}$	1
$\{b, c\}$	$\{a, c\}$	$\{c\}$	1
$\{c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{c\}$	1
$\{a, b, c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$	1
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	2
$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b\}$	2
$\{a, b, c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	2
$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	2
$\{a, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, c\}$	2
$\{a, b, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	2
$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	2
$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$	2
$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	2
$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	3

On obtient : $\sum_{\substack{A\subset E\\B\subset E}} \text{card}\left(A\cap B\right) = 27\times 1 + 9\times 2 + 1\times 3 = 27+18+3 = 48$ et la formule obtenue donne : $n\,4^{n-1} = 3\times 4^{3-1} = 3\times 16 = 48$.

Remarque : on n'hésitera pas à s'entraîner à dresser seul le tableau précédent : c'est un excellent travail de dénombrement qui requiert de procéder avec méthode, en s'organisant.

On s'intéresse maintenant à $\sum_{\substack{A\subset E\\B\subset E}} \text{card}\left(A\cup B\right)$.

On va raisonner sur la valeur p de $\text{card}\left(A\cup B\right)$ qui appartient à $[\![0\,;n]\!]$.

Soit donc p fixé dans $[\![0\,;n]\!]$ et soit p éléments de E fixés également. Il y a $\binom{n}{p}$ façons de choisir ces p éléments dans E.

On va chercher le nombre de paires $\{A, B\}$ ayant pour union les p éléments fixés.

Choisir A revient à choisir une partie quelconque parmi les p éléments fixés.

Supposons donc que nous ayons choisi les k éléments de A parmi les p fixés (il y a $\binom{p}{k}$ possibilités). B doit alors contenir au moins les $p-k$ éléments restants. A ces $p-k$ éléments on peut ajouter n'importe quels éléments de A. Il y a, pour cela, 2^k possibilités (i.e. le nombre de parties de A).

Ainsi, le nombre de paires $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ ayant pour union les p éléments fixés vaut :

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}2^k$$

Puisqu'il y a $\binom{n}{p}$ unions de cardinal p, il vient finalement :

$$\sum_{\substack{\mathrm{A}\subset\mathrm{E}\\ \mathrm{B}\subset\mathrm{E}}}\operatorname{card}\left(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\right)=\sum_{p=0}^{n}\left[\binom{n}{p}\times p\times\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}2^k\right]$$

Comme $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}2^k=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}2^k\,1^{p-k}=\left(2+1\right)^p=3^p$, on a :

$$\sum_{\substack{\mathrm{A}\subset\mathrm{E}\\ \mathrm{B}\subset\mathrm{E}}}\operatorname{card}\left(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\right)=\sum_{p=0}^{n}\left[\binom{n}{p}\times p\times\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}2^k\right]=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\times p\times 3^p$$

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\times p\times 3^p&=\sum_{p=0}^{n}\frac{n!}{p!(n-p)!}\times p\times 3^p=\sum_{p=1}^{n}\frac{n!}{p!(n-p)!}\times p\times 3^p\\&=\sum_{p=1}^{n}\frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}\times 3^p=n\sum_{p=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(p-1)!\left((n-1)-(p-1)\right)!}\times 3^p\\&=n\sum_{p=1}^{n}\binom{n-1}{p-1}\times 3^p=n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}\times 3^{p+1}=3n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}\times 3^p\\&=3n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}\times 3^p\times 1^{n-1-p}=3n\left(3+1\right)^{n-1}\\&=3n\,4^{n-1}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{\substack{\mathrm{A}\subset\mathrm{E}\\ \mathrm{B}\subset\mathrm{E}}}\operatorname{card}\left(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\right)=3n\,4^{n-1}}$$

Par exemple, avec $n=2$, en notant $\mathrm{E}=\{a,b\}$ et en ne retenant que les paires A et B d'union non vide, on a :

A	B	$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$	$\operatorname{card}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	1
$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a\}$	1
$\varnothing$	$\{a\}$	$\{a\}$	1
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b\}$	1
$\{b\}$	$\varnothing$	$\{b\}$	1
$\varnothing$	$\{b\}$	$\{b\}$	1
$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	2
$\{b\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	2
$\{a,b\}$	$\varnothing$	$\{a,b\}$	2
$\varnothing$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	2
$\{a,b\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	2
$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	2
$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	2
$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	2
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	2

On obtient : $\sum_{\substack{\mathrm{A}\subset\mathrm{E}\\ \mathrm{B}\subset\mathrm{E}}}\operatorname{card}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=6\times1+9\times2=6+18=24$ et la formule obtenue donne :

$3\,n\,4^{n-1}=3\times2\times4^{2-1}=6\times4=24$.

Résultat final

Pour tout ensemble E de cardinal n :

$$\sum_{\mathrm{A}\subset\mathrm{E}}\operatorname{card}\mathrm{A}=n\,2^{n-1}\qquad\sum_{\substack{\mathrm{A}\subset\mathrm{E}\\ \mathrm{B}\subset\mathrm{E}}}\operatorname{card}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=n\,4^{n-1}\qquad\sum_{\substack{\mathrm{A}\subset\mathrm{E}\\ \mathrm{B}\subset\mathrm{E}}}\operatorname{card}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=3n\,4^{n-1}$$